

DOI: 10.11779/CJGE202101020

层状地基上预应力弹性板的竖向振动特性研究

刘春林^{1, 2, 3}, 艾智勇², 唐孟雄¹, 胡贺松¹

(1. 广州市建筑科学研究院有限公司, 广东 广州 510440; 2. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092;

3. 华南理工大学土木与交通学院, 广东 广州 510641)

摘要: 基于解析层元法和经典弹性薄板理论, 提出了一种求解层状地基与预应力弹性板竖向动力相互作用的计算方法。从地基的基本解和弹性薄板动力方程出发, 借助 Hankel 积分变换, 并结合地基与弹性板在接触面上的相容条件, 得到变换域内地基与弹性板的动力耦合方程。通过求解耦合方程和数值逆变换, 得到频域内预应力弹性板的位移解。与已有文献的结果进行对比, 验证提出方法及计算程序的正确性及有效性。最后, 通过算例分析, 探讨了板-土刚度比和板径向预应力对预应力弹性板竖向动位移的影响。

关键词: 预应力弹性板; 层状地基; 解析层元法; 竖向振动; 经典薄板理论

中图分类号: TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2021)01-0174-07

作者简介: 刘春林(1987—), 男, 博士, 主要从事土与结构共同作用方面的研究工作。E-mail: liuchunlin2007@163.com。

Dynamic analysis of pre-stressed elastic plates resting on layered soils

LIU Chun-lin^{1, 2, 3}, AI Zhi-yong², TANG Meng-xiong¹, HU He-song¹

(1. Guangzhou Institute of Building Science Co., Ltd., Guangzhou 510440, China; 2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji

University, Shanghai 200092, China; 3. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology,

Guangzhou 510641, China)

Abstract: Based on the analytical layer-element method and classical the elastic thin plate theory, a method for solving the vertical dynamic interaction between the layered soils and the pre-stressed elastic plates is proposed. Starting from the fundamental solution of soils and the dynamic equation of elastic plates, a dynamic coupling equation for the soils and elastic plates in the transformation domain is obtained by means of the Hankel integral transformation and the compatibility condition at the soil-elastic plate interface. The displacement solution for the pre-stressed elastic plates in frequency domain is further obtained by solving the coupling equation and the numerical inverse transformation. By comparing with the results in the existing literatures, the accuracy of the proposed method and the program is verified. Finally, the influences of the stiffness ratio of the plates to the soils and the radial pre-stress of plate on the vertical dynamic displacement of pre-stressed elastic plates are discussed.

Key words: pre-stressed elastic plate; layered soil; analytical layer-element method; vertical vibration; classical elastic thin plate theory

0 引言

地基上的道路路面、高铁轨道板、机场跑道等在热胀冷缩作用下会产生径向应力。通常, 材料遇冷收缩, 产生拉应力, 遇热膨胀, 产生压应力。对于以混凝土为建造材料的弹性板结构来说, 其热胀冷缩效应更为明显, 因为混凝土的极限拉应力约只有压应力的十分之一, 过大的拉应力容易导致混凝土板开裂, 从而影响板的正常使用。另一方面, 车辆的行驶、高铁的运行、飞机的滑行等都会对混凝土板产生竖向动力作用, 以致弹性板的变形规律在动荷载和径向应力的耦合作用下变得甚为复杂。目前, 关于该状态下预应

力弹性板的动力分析理论仍然非常缺乏, 而且径向应力的存在对沉降变形的影响机理也缺少深入了解。因此, 提出有效的分析方法揭示地基上预应力弹性板的动力特性, 不仅有利于准确预测预应力弹性结构在动荷载作用下的变形规律, 而且还能将该方法推广应用到工程实践中, 具有一定的理论意义和工程应用价值。

针对地基上无预应力弹性板的振动问题, 国内外

基金项目: 国家自然科学基金项目(51908225, 41672275); 中国博士后科学基金项目(2019M652899)

收稿日期: 2019-12-31

***通信作者** (E-mail: zhiyongai@tongji.edu.cn)

学者已开展了一系列研究。Rajapakse^[1]采用经典薄板理论和位移格林函数,研究了圆环板的动力响应问题。Gucunski 等^[2]应用能量法和环型单元法,探讨了地基上弹性圆板的竖向简谐振动。金波^[3]建立了弹性半空间地基与弹性圆板竖向相互作用的第二类 Fredholm 积分方程。Yu 等^[4]对 Winkler 地基和 Pasternak 地基上 Reissner-Mindlin 板的瞬态响应进行了细致的研究。Chen 等^[5]运用模态分析法评估了竖向动荷载作用下弹性圆板的动位移。张建辉^[6]基于无单元方法获得了双参数地基上矩形弹性板的挠度分布。王春玲等^[7]获得了非饱和地基与多层矩形板的稳态解。上述工作均以有限尺寸板为研究对象。

一般道路路面、机场跑道相对于荷载作用面积可看成是无限大板。针对地基上无限大弹性板的振动问题,学者们也做了大量工作。孙璐等^[8]和 Kim 等^[9]通过积分变换方法,分析了移动荷载对无限大弹性板的作用。鉴于积分变换方法带来的便利,越来越多学者^[10-14]结合经典薄板理论和积分变换方法来研究不同地基模型与无限大板的动力相互作用。然而,上述研究仍未考虑径向应力的耦合效应。通常,热胀冷缩引起的径向应力先于外荷载作用在弹性板上,因而引起的径向应力可称为预应力。目前,针对动荷载引起地基与预应力结构相互作用的分析极少。Kin 等^[15]以列车在轨道上的行驶为研究背景,研究了 Winkler 地基上预应力轨道梁的竖向动力沉降变形。天然地基往往呈现分层特性,因此有必要开展层状地基与预应力弹性板的动力相互作用研究。

本文在已有研究基础上^[16-18],借助解析层元法和经典薄板理论,求解了层状地基上预应力弹性板的动力响应问题。首先采用经典弹性薄板理论和积分变换方法,推导出预应力弹性板的动力方程;然后,结合层状地基的基本解和板-土接触面上的接触条件,求得层状地基上预应力弹性板的位移解答;在此基础上,重点分析弹性板的板-土刚度比和径向预应力对弹性板竖向沉降变形的影响。

1 预应力弹性板的振动方程

图 1 所示为预应力弹性板明置在层状横观各向同性地基表面,在预应力弹性板的上表面作用有一竖向简谐荷载 $p(r, z_0)e^{i\omega t}$, 其中 p 为荷载幅值, a 为荷载半径, ω 为荷载圆频率, z_0 为地基深度位置,且其所引起的地基反力为 $q(r, z_0)e^{i\omega t}$ 。此外,假设弹性板的径向还受到均匀应力 N 的作用,以此来模拟弹性板所受到预应力的影响。为简化分析,对板-土相互作用模型作以下假定:①弹性板满足小挠度经典弹性薄板理

论;②弹性板竖向位移与地基表面紧密连接,且忽略径向摩擦力的影响。层状地基由 n 层土组成,最下面层土为基岩或半空间,第 j 层土的材料参数分别为竖向弹性模量 E_{vj} 、水平向弹性模量 E_{hj} , 竖向剪切模量 G_{vj} 、正交水平向泊松比 μ_{vhj} 和 μ_{hj} 、土体密度 ρ_{sj} 和土层厚度 Δh_j 。

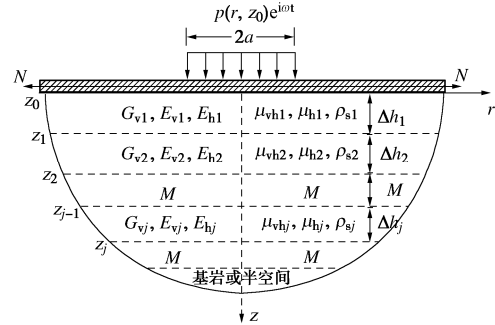


图 1 层状地基上预应力弹性板的竖向振动计算模型

Fig. 1 A pre-stressed elastic plate resting on layered soils

考虑到研究问题的对称性,采用柱坐标系进行分析。根据弹性薄板振动理论,可以得到以位移形式表示的弹性板动力微分方程为^[19]

$$D\nabla^4 w_p(r, z_0, t) - N\nabla^2 w_p(r, z_0, t) + \rho_p h_p \frac{\partial^2 w_p(r, z_0, t)}{\partial t^2} = p(r, z_0, t) - q(r, z_0, t) \quad (1)$$

式中 $D = E_p h_p^3 / 12(1 - \mu_p^2)$ 为弹性板的抗弯刚度, E_p , μ_p , ρ_p 和 h_p 分别为弹性板的弹性模量、泊松比、密度和厚度; $w_p(r, z_0, t)$ 为弹性板的挠度函数, ∇^2 为 Laplace 算子; N 为弹性板的径向预应力,当弹性板径向受压时, N 为负值。

由于弹性板受到竖向简谐荷载作用,且公式所有变量均含有简谐因子 $e^{i\omega t}$, 即 $w_p(r, z_0, t) = w_p(r, z_0)e^{i\omega t}$, $p(r, z_0, t) = p(r, z_0)e^{i\omega t}$, $q(r, z_0, t) = q(r, z_0)e^{i\omega t}$, 为简化理论推导,将上述物理量代入式(1)进行稳态化处理,于是可得

$$D\nabla^4 w_p(r, z_0) - N\nabla^2 w_p(r, z_0) - \rho_p h_p \omega^2 w_p(r, z_0) = p(r, z_0) - q(r, z_0) \quad (2)$$

当预应力弹性板受到的是竖向圆形均布简谐荷载时, $p(r, z_0)$ 可表示为

$$p(r, z_0) = \begin{cases} p_0 & 0 < r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (3)$$

式中, p_0 为作用在弹性板上的均布荷载强度幅值。

式(2)是偏微分方程,直接求解较为困难。为此,按常规做法引入 Hankel 积分变换,将式(2)转换为常微分方程。函数 $f(r, z)$ 为关于坐标 r 的 m 阶 Hankel 积分变换及其逆变换分别定义为^[20]

$$\bar{f}(\xi, z) = \int_0^\infty f(r, z) J_m(\xi r) r dr \quad (4a)$$

$$f(r, z) = \int_0^\infty \bar{f}(\xi, z) J_m(\xi r) \xi d\xi \quad (4b)$$

式中 $\bar{f}(\xi, z)$ 为 $f(r, z)$ 的 m 阶 Hankel 变换; $J_m(\xi r)$ 为 m 阶第一类 Bessel 函数; ξ 为关于 r 的 Hankel 积分变换参数。

因此, 采用式 (4a) 对式 (2) 进行关于径向 r 的零阶 Hankel 变换, 并结合其变换性质^[20], 可得

$$D\xi^4 \nabla^4 \bar{w}_p(\xi, z_0) + N\xi^2 \nabla^2 \bar{w}_p(\xi, z_0) - \rho_p h_p \omega^2 \bar{w}_p(\xi, z_0) = \bar{p}(\xi, z_0) - \bar{q}(\xi, z_0), \quad (5)$$

式中, $\bar{w}_p(\xi, z_0)$, $\bar{p}(\xi, z_0)$ 和 $\bar{q}(\xi, z_0)$ 分别为 $w_p(\xi, z_0)$, $p(\xi, z_0)$ 和 $q(\xi, z_0)$ 在 Hankel 积分变换域内的物理量。

类似地, 对式 (3) 进行关于 r 的零阶 Hankel 变换, 可得以下表达式:

$$\bar{p}(\xi, z_0) = \begin{cases} p_0 a J_1(a\xi) / \xi & (0 < r \leq a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \quad (6)$$

结合式 (5) 和 (6), 可得预应力弹性板挠度方程在变换域内的表达式为

$$\bar{w}_p(\xi, z_0) = \frac{\bar{p}(\xi, z_0) - \bar{q}(\xi, z_0)}{D\xi^4 + N\xi^2 - \rho_p h_p \omega^2} \quad (7)$$

在研究弹性板-层状地基动力相互作用时, 核心问题在于弹性板-地基界面处接触应力的求解, 即 $\bar{q}(\xi, z_0)$ 的求解。若作用在弹性板上表面的外荷载 $\bar{p}(\xi, z_0)$ 和地基对弹性板下表面的接触应力 $\bar{q}(\xi, z_0)$ 已知, 即可根据式 (7) 求得预应力弹性板的挠度变形。因此, 需求解层状地基在 $\bar{q}(\xi, z_0)$ 作用下的动力响应。

2 弹性板与层状地基的共同作用方程

层状地基由 n 层土体组成, 在荷载作用下层状地基的动力响应问题已有众多学者研究。本文采用课题组前期推导的解析层元方法进行求解, 其简要求解思路介绍如下:

假设第 j 层土的厚度为 $\Delta h_j = z_j - z_{j-1}$, 其上表面 z_{j-1} 处与下表面 z_j 处的应力与位移关系为^[18]

$$\begin{bmatrix} -\bar{\tau}_r(\xi, 0) \\ -\bar{\sigma}_z(\xi, 0) \\ \bar{\tau}_r(\xi, \Delta h_j) \\ \bar{\sigma}_z(\xi, \Delta h_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{u}_r(\xi, 0) \\ -\bar{u}_z(\xi, 0) \\ \bar{u}_r(\xi, \Delta h_j) \\ \bar{u}_z(\xi, \Delta h_j) \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中 $\bar{u}_r(\xi, \Delta h_j)$, $\bar{u}_z(\xi, \Delta h_j)$, $\bar{\tau}_r(\xi, \Delta h_j)$, $\bar{\sigma}_z(\xi, \Delta h_j)$ 分别为经过 Hankel 积分变换后的径向和竖向位移分量以及应力分量; k_{ij} 为对称的精确刚度矩阵元素, 即解析层元元素, 其表达式及推导过程详见文献[18]。

为表达简洁, 将式 (8) 缩写为以下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} -\bar{T}(\xi, 0) \\ \bar{T}(\xi, \Delta h_j) \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{(j)}(\xi, z) \begin{bmatrix} \bar{U}(\xi, 0) \\ \bar{U}(\xi, \Delta h_j) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

式中 $\bar{U}(\xi, z_j) = [\bar{u}_r(\xi, z_j), \bar{u}_z(\xi, z_j)]^T$ 和 $\bar{T}(\xi, z_j) = [\bar{\tau}_r(\xi, z_j), \bar{\sigma}_z(\xi, z_j)]^T$ 分别为 Hankel 变换域内地基深度 z_j 处的位移矩阵和应力矩阵; $\mathbf{K}^{(j)}(\xi, z)$ 为第 j 层土的刚度矩阵, 它只与土层材料参数和厚度有关, 且不含负指数函数, 因求解时具有解析解的精度, 故称之为单层土的解析层元。

对于层状地基, 采用式 (9) 获取每层土体的解析层元, 再结合有限元法关于单元刚度矩阵的组装思路, 则可建立层状地基的总刚度矩阵方程组如下:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}(\xi, z_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1)} & & & & \\ & \mathbf{K}^{(2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{K}^{(n)} & \\ & & & & \mathbf{K} \end{bmatrix}_{(2n+2) \times (2n+2)} \begin{bmatrix} \bar{U}(\xi, z_0) \\ \bar{U}(\xi, z_1) \\ \vdots \\ \bar{U}(\xi, z_j) \\ \vdots \\ \bar{U}(\xi, z_{n-1}) \\ \bar{U}(\xi, z_n) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

式 (10) 可进一步改写为

$$\begin{bmatrix} \bar{U}(\xi, z_0) \\ \bar{U}(\xi, z_1) \\ \vdots \\ \bar{U}(\xi, z_j) \\ \vdots \\ \bar{U}(\xi, z_{n-1}) \\ \bar{U}(\xi, z_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1)} & & & & \\ & \mathbf{K}^{(2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{K}^{(n)} & \\ & & & & \mathbf{K} \end{bmatrix}_{(2n+2) \times (2n+2)}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{F}(\xi, z_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

由于弹性板-土体的竖向接触应力 $\bar{q}(\xi, z_0)$ 作用在地基表面, 故 (11) 式中 $\bar{F}(\xi, z_0) = [0, \bar{q}(\xi, z_0)]^T$ 。于是, 将 $\bar{F}(\xi, z_0)$ 作为已知外荷载量, 代入式 (11) 即可求得变换域内层状地基任意深度处的位移向量。于是, 在变换域内地基表面的竖向位移可表示为

$$\bar{u}_z(\xi, z_0) = \mathbf{K}_{22} \bar{q}(\xi, z_0), \quad (12)$$

式中, \mathbf{K}_{22} 为式 (11) 中地基总柔度矩阵的第二行第二列所对应的矩阵元素。

由弹性板与层状地基在接触面上的位移连续条件可知

$$\bar{u}_z(\xi, z_0) = \bar{w}_p(\xi, z_0) \quad (13)$$

联立公式 (7), (12) 和 (13), 可求得变换域内未知的板-土接触应力:

$$\bar{q}(\xi, z_0) = \frac{\bar{p}(\xi, z_0)}{1 + (D\xi^4 + N\xi^2 - \rho_p h_p \omega^2) \mathbf{K}_{22}} \quad (14)$$

将式 (14) 代入式 (11), 可得到变换域内预应力弹性板的竖向挠度表达式; 然后通过数值逆变换, 可进一步得到频域内的解答。

3 数值分析与讨论

根据上述理论编译了相应的 Fortran 计算程序。为了简化结果分析与讨论, 定义弹性板 - 土体的刚度比为 $S_r = E_p k_p^3 / G_{v1} a^3$ 。此外, 还定义下面无量纲变量: 无量纲半径 $r_0 = r/a$, 无量纲圆频率 $\bar{\omega} = a\omega\sqrt{\rho_{s1}/G_{v1}}$, 无量纲竖向位移 $w_{p0} = G_{v1} w_p / (ap_0)$, 无量纲预应力 $\bar{N} = N/p$ 。由于数值计算在复数域内进行求解, 所得竖向位移量由实部和虚部两部分数值组成, 其真实竖向位移幅值可表示为 $|w_{p0}| = |G_{v1} w_p / (ap_0)|$ 。考虑到弹性板材料一般是混凝土, 除特殊说明外, 下面的算例分析中均取弹性板的泊松比 μ_p 为 0.25。

3.1 算例验证

文献[2]通过环形单元法分析了明置在地基表面弹性板的竖向频域响应。与本文方法相比, 该方法不能考虑弹性板径向预应力对板竖向振动特性的影响。鉴于此, 将本文解答退化为无预应力弹性板模型与其结果进行对比验证。在对比算例中, 计算参数取为 $E_{v1} : E_{h1} : G_{v1} = 2.7 : 2.7 : 1$, $\mu_{vh1} = \mu_{h1} = 0.35$, $S_r = 0.125$, $\rho_p = 0.0$, $\bar{\omega} = 1.35$ 和 $\bar{N} = 0$ 。图 2 给出了弹性半空间地基上弹性板在竖向均布简谐荷载作用下的竖向动力位移对比结果, 其中, w_p^{max} 为 $\bar{\omega} = 0$ 时弹性板的中心竖向位移。由图 2 可知, 本文结果与文献[2]结果吻合较好, 这证明了本文理论和数值方法的正确性及可行性。

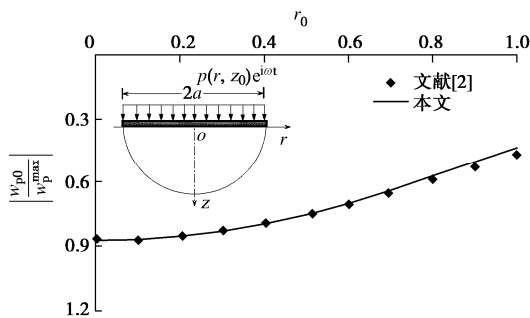


图 2 半空间地基上弹性板的竖向位移对比

Fig. 2 Comparison of vertical displacements of elastic plates on half space

表 1 层状地基计算参数

Table 1 Parameters of layered soils

土层	E_v /MPa	E_h /MPa	G_v /MPa	μ_{vh}	μ_h	Δh /m
1	6	3	2.4	0.25	0.25	5.0
2	8	16	3.2	0.40	0.25	5.0
3	10	5	4.0	0.35	0.25	5.0
4	12	12	5.0	0.30	0.25	5.0
5	14	14	5.0	0.25	0.25	5.0

为进一步验证层状地基与弹性板竖向相互作用理论的正确性, 采用文献[21]给出的算例进行对比验证。

文献[21]采用传递矩阵法求解了横观各向同性地基与弹性板的相互作用, 其中层状地基由 5 层横观各向同性土体组成, 土层参数如表 1 所示, 文献[21]定义的无量纲竖向位移系数为 $I_w = w_{p0}(1+v_{h1})$, 板 - 土刚度比为 $k_r = S_r(1-v_{h1})/2$ 。由图 3 可知, 本文解析层元法计算结果与文献[21]结果吻合较好, 这就进一步证明了本文方法的正确性与适用性。

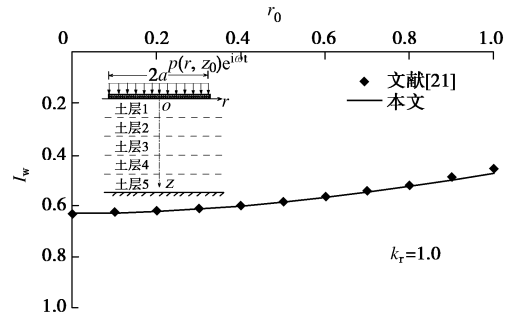


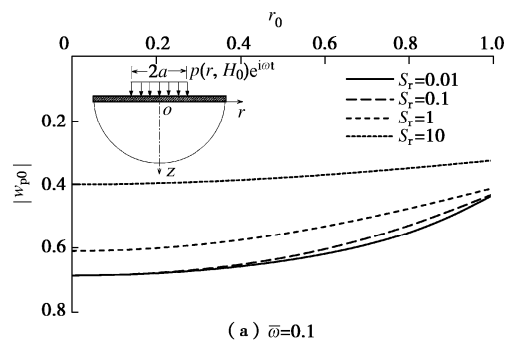
图 3 层状横观各向同性地基上弹性板的竖向位移对比

Fig. 3 Comparison of vertical displacements of elastic plates on transversely isotropic layered soils

3.2 板 - 土刚度比的影响分析

实际工程中, 弹性板一般由钢筋混凝土材料或者钢材建造而成, 其物理力学性能变化幅度不大。然而, 天然土体由于历史沉积形成或人为扰动等原因而呈现出复杂的力学特性, 造成了板 - 土刚度比的明显差异。本算例侧重研究板 - 土刚度比 S_r 对弹性板竖向振动响应的影响。假设地基为横观各向同性半空间模型 ($\mu_{vh1} = \mu_{h1} = 0.35$, $E_{v1} : E_{h1} : G_{v1} = 2.5 : 2.5 : 1$, $\rho_p = 0.0$ 和 $\bar{N} = 0$), 分析刚度比 S_r 分别为 0.01, 0.1, 1.0 和 10 的 4 种工况。

图 4 给出了 $\bar{\omega} = 0.1$ (低频) 和 $\bar{\omega} = 1.0$ (高频) 时, 不同刚度比条件下, 弹性板竖向位移沿径向的分布规律。由图可知, 从整体上看, 板的中心位移最大, 离中心越远, 位移越小; 刚度比 S_r 越大, 位移也越小; 无论处于高频还是低频工况, S_r 在 0.01~0.1 范围内变化, 其竖向位移都比较相近, 说明此时弹性板较为柔软; 同时还发现, 当 $S_r = 10$ 时, 弹性板竖向位移沿径向的分布都比较均匀, 与刚性板的分布特点相似, 故可近似看成刚性板。此外, 频率越高, 竖向位移相对减少, 因此低频振动引起无预应力弹性板的变形更为明显。



(a) $\bar{\omega} = 0.1$

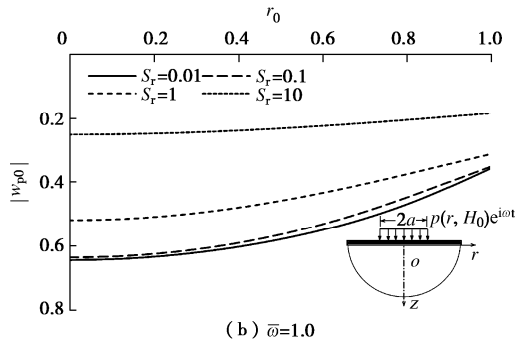


图4 板-土刚度比 S_r 对弹性板竖向位移的影响

Fig. 4 Influences of stiffness ratio S_r on vertical displacements of elastic plates

3.3 弹性板径向预应力的影响分析

对于混凝土路面板，若路面板由 C15 等级的混凝土建造而成，而且以其抗压、抗拉设计强度作为混凝土板预应力 N 的最大预压、预拉应力值（压应力 7.2 MPa，拉应力 0.91 MPa），并以中型车辆单轮的轮压动荷载强度为例（单轮承担荷载/轮压接触面积=70 kN/0.05 m²=1.4 MPa），可得此时无量纲预应力 \bar{N} 的取值范围约为 -5.14~0.65；因此，实际工程中大部分混凝土结构因热胀冷缩所引起的温度应力基本都会在此范围内变动，具有较为广泛的适用性，故后续算例分析中 \bar{N} 的取值基本都在此范围内。

预应力弹性板属于受弯构件，探讨预应力板的竖向位移沿径向的变化规律，有助于深入揭示预应力板的受力变形机理。同样，以横观各向同性半空间地基上预应力弹性板的竖向振动为研究背景（ $\mu_{vh1} = \mu_{h1} = 0.3$, $E_{v1} : E_{h1} : G_{v1} = 2.85 : 2.85 : 1$, $S_r = 0.2$ 和 $\rho_p = 0.0$ ），对承受不同预应力强度的弹性板进行讨论。无量纲预应力 \bar{N} 分别取 -1.5, -1, 0 和 1 四种工况。需要指出的是，弹性板的径向预应力 \bar{N} 以拉为正，压为负， $\bar{N} = 0$ 表示弹性板没有受到径向预应力的作用。

如图 5 (a) 所示，当荷载频率较低时，预拉应力板（ $\bar{N} > 0.0$ ）的竖向位移明显小于其它情况；而且，就本算例而言，无预应力板（ $\bar{N} = 0.0$ ）的竖向位移幅值也小于预压应力板（ $\bar{N} < 0.0$ ）。换句话说，在其它条件相同的情况下，预压应力板的受力行为最为不利，无预应力板的次之，预拉应力板的最小。高频荷载作用时，如图 5 (b) 所示，无预应力弹性板（ $\bar{N} = 0.0$ ）的竖向位移要大于有预应力作用的弹性板（ $\bar{N} \neq 0.0$ ），这与低频时所得规律不同；而且，此时最大竖向位移并非都集中在弹性板中心，当 $\bar{N} = -1$ 时，其最大竖向位移在无量纲半径 $r_0 = 0.5$ 处，但最小值仍在边缘位置。此外，高频荷载作用时，弹性板可通过施加预应力的手段来达到减少沉降变形的目的；就本算例而言，施加的预应力 $\bar{N} \leq -1.5$ 时可有效减少板的沉降变形，

这为改善动力弹性板的抗变形能力提供了新思路。

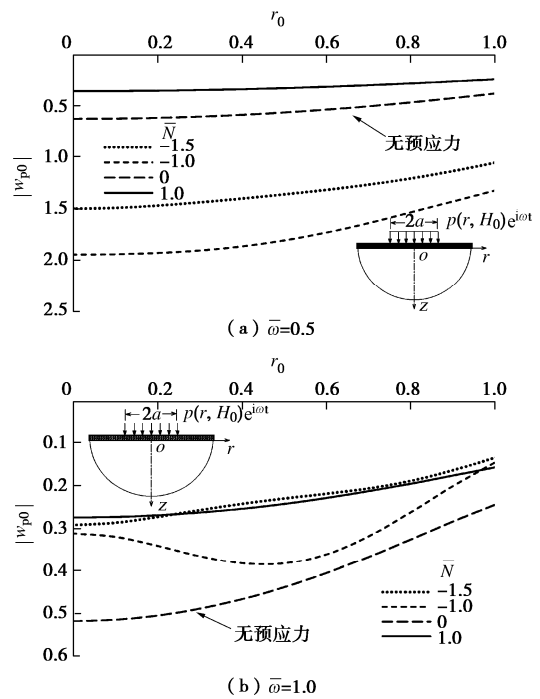


图5 径向预应力 \bar{N} 对弹性板竖向位移的影响

Fig. 5 Influences of radial prestress \bar{N} on vertical displacements of elastic plates

当荷载频率较低时，在不同板-土刚度比条件下，较小的预压应力也会导致弹性板产生较大的竖向位移，具体如图 6 (a) 所示。对于 $S_r \leq 0.2$ 的弹性板，应避免承受的预应力范围为 $-2 \leq \bar{N} \leq 0$ ，其它情况则约为 $-3 \leq \bar{N} \leq 0$ 比较适宜。总体而言，低频荷载作用时，具有一定预拉应力和较大预压应力的弹性板，其沉降变形均较小，抗变形能力更强。换句话说，工程实践中，低温引起弹性板的拉应力与高温引起弹性板的较大压应力，在一定程度上均能有效减少弹性板的动力变形。这种现象有利于工程设计人员进行工程设计时考虑预应力对结构受力变形的影响范围。

图 6 (b) 反映的是高频时弹性板最大竖向位移与预应力 \bar{N} 之间的关系。由图 6 可见，在所施加的预压应力范围中， $S_r = 2$ 的最大竖向位移要远小于其它两种情况；虽然 $S_r = 0.02$ 和 0.2 的最大竖向位移相差不大，但是它们却在 $-1 \leq \bar{N} < 0$ 范围内陡增得非常明显，这说明弹性板要避免受到此范围内预压应力作用，否则会造成弹性板产生过大的竖向位移，进而降低了弹性板的抗变形能力；对于抗变形扰动要求较高的精密设备基础板，尤其要引起重视。对于 $S_r = 2$ 的弹性板，其受预压应力影响较为平缓，且主要影响范围为 $-2 \leq \bar{N} < 0$ 。此外，对比图 6 (a) 和 (b) 发现，板-土刚度比 S_r 相同时，荷载频率越高，最大竖向位移越小，且并非 S_r 越大最大竖向位移越小。总之，弹性板变形

与板 - 土刚度比、荷载频率以及径向预应力密切相关。

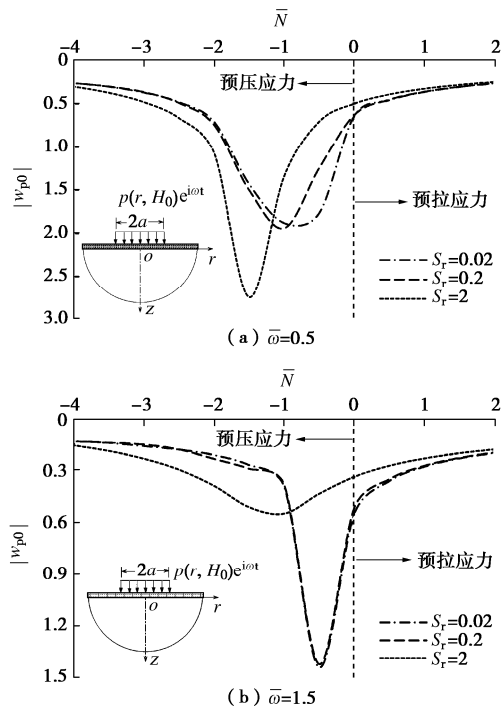


图 6 径向预应力 \bar{N} 对弹性板最大竖向位移的影响

Fig. 6 Influences of \bar{N} on maximum vertical displacements of elastic plates

4 结 论

基于解析层元法和弹性薄板理论, 提出了一种求解预应力弹性板与层状地基竖向动力相互作用的计算模型。通过数值计算与分析验证了该模型的有效性, 得出以下两点结论。

(1) 无论高频荷载还是低频荷载作用, 板 - 土刚度比 S_r 在 0.01~0.1 范围内变化时, 弹性板竖向位移的差异较小; 当 $S_r = 10$ 时, 弹性板竖向位移沿径向的分布较为均匀, 可将其视为刚性板。

(2) 动荷载作用下, 弹性板的沉降变形与荷载频率、预应力大小及板 - 土刚度比相关; 为避免产生过大变形, 对于板 - 土刚度比 $S_r \leq 0.2$ 的弹性板, 应避免承受 $-2 \leq \bar{N} \leq 0$ 范围内的预压应力作用, 其它刚度比情况则为 $-3 \leq \bar{N} \leq 0$ 比较适宜。

参考文献:

[1] RAJAPAKSE R K N D. Dynamic response of elastic plates on viscoelastic half space[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1989, **115**(9): 1867 - 1881.
 [2] GUCUNSKI N, PEEK R. Vertical vibrations of circular flexible foundations on layered media[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1993, **12**(3): 183 - 192.
 [3] 金 波. 用第二类 Fredholm 积分方程求解弹性半空间上弹

性板的垂直振动[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(2): 145 - 150. (JIN Bo. Using Fredholm integral equation of the second kind to solve the vertical vibration of elastic plate on an elastic half-space[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1998, **19**(2): 145 - 150. (in Chinese))
 [4] YU L, SHEN H S, HUO X P. Dynamic responses of Reissner-Mindlin plates with free edges resting on tensionless elastic foundations[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, **299**(1/2): 212 - 228.
 [5] CHEN S S, HOU J G. Modal analysis of circular flexible foundations under vertical vibration[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2009, **29**(5): 898 - 908.
 [6] 张建辉. 双参数地基板的无单元法[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(7): 776 - 779. (ZHANG Jian-hui. Element-free method for two-parameter subgrade plates[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, **27**(7): 776 - 779. (in Chinese))
 [7] 王春玲, 赵鲁珂, 李东波. 非饱和地基上多层矩形板稳态响应解析研究[J]. 岩土工程学报, 2019, **41**(12): 2182 - 2190. (WANG Chun-Lin, ZHAO Lu-ke, LI Dong-bo. Analytical study on dynamic response of multi-layered plate in unsaturated half-space[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2019, **41**(12): 2182 - 2190. (in Chinese))
 [8] 孙 璐, 邓学钧. 弹性基础无限大板对移动荷载的响应[J]. 力学学报, 1996, **28**(6): 756 - 760. (SUN Lu, DENG Xue-jun. General theory for stead dynamic problem of infinite plate on an elastic foundation[J]. Acta Mechanica Sinica, 1996, **28**(6): 756 - 760. (in Chinese))
 [9] KIM S M, ROESSET J M. Moving loads on a plate on elastic foundation[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, **124**(9): 1010 - 1017.
 [10] 卢 正, 姚海林, 杨 洋. 上覆弹性板双层地基在移动荷载作用下的动力响应[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, **27**(增刊 2): 3312 - 3320. (LU Zheng, YAO Hai-lin, YANG Yang. Dynamic response of an elastic slab resting on double-layered subgrade subjected to moving load[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, **27**(S2): 3312 - 3320. (in Chinese))
 [11] 蔡袁强, 孙宏磊, 徐长节. 移动荷载下上覆弹性板饱和地基的动力响应[J]. 计算力学学报, 2008, **25**(2): 156 - 161. (CAI Yuan-qiang, SUN Hong-lei, XU Chang-jie. Response of beams on poroelastic half-space soil medium to moving load[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2008, **25**(2): 156 - 161. (in Chinese))

- [12] CAI Y, CAO Z, SUN H, et al. Dynamic response of pavements on poroelastic half-space soil medium to a moving traffic load[J]. Computers and Geotechnics, 2009, **36**(1/2): 52 - 60.
- [13] 曹彩芹, 李诚诚, 李 华. 移动荷载作用下路面与饱和弹性地基的动力响应[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2014, **46**(2): 204 - 209. (CAO Cai-qin, LI Cheng-cheng, LI Hua. Dynamic response of pavement plate-saturated elastic foundation under moving loads[J]. Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition), 2014, **46**(2): 204 - 209. (in Chinese))
- [14] 张春丽, 王 博, 祝彦知. 移动荷载下正交各向异性地基无限大板的动力响应[J]. 岩土工程学报, 2017, **39**(2): 352 - 358. (ZHANG Chun-li, WANG Bo, ZHU Yan-zhi. Dynamic response of infinite elastic plate on orthotropic half-space medium under moving loads[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, **39**(2): 352 - 358. (in Chinese))
- [15] KIM S M, CHUNG W. Vibration of simplified prestressed pavement model under moving two-axle harmonic loads[J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2009, **13**(6): 409 - 421.
- [16] 艾智勇, 杨轲舒. 横观各向同性层状地基上弹性矩形板的参数研究[J]. 岩土工程学报, 2016, **38**(8): 1442 - 1446. (AI Zhi-yong, YANG Ke-shu. Parametric study on an elastic rectangle plate on transversely isotropic multi-layered soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, **38**(8): 1442 - 1446. (in Chinese))
- [17] AI Z Y, XU C J, REN G P. Vibration of a pre-stressed plate on a transversely isotropic multilayered half-plane due to a moving load[J]. Applied Mathematical Modelling, 2018, **59**: 728 - 738.
- [18] AI Z Y, LI Z X, CANG N R. Analytical layer-element solution to axisymmetric dynamic response of transversely isotropic multilayered half-space[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2014, **60**: 22 - 30.
- [19] CHONAN S. Moving load on a pre-stressed plate resting on a fluid half-space[J]. Ingenieur-Archiv, 1976, **45**(3): 171 - 178.
- [20] SNEDDON I N. The Use of Integral Transforms[M]. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [21] 艾智勇, 成怡冲. 轴对称受荷弹性圆板下横观各向同性多层地基分析[J]. 建筑结构学报, 2012, **33**(4): 154 - 157. (AI Zhi-yong, CHENG Yi-chong. Analysis of transversely isotropic layered soils beneath axisymmetrically loaded elastic circular plate[J]. Journal of Building Structures, 2012, **33**(4): 154 - 157. (in Chinese))

《岩土工程学报》征订启事

《岩土工程学报》创办于1979年,是我国水利、土木、力学、建筑、水电、振动等六个全国性学会联合主办的学术性科技期刊。由南京水利科学研究所承办,国内外公开发行。主要刊登土力学、岩石力学领域中能代表当今先进理论和实践水平的科学研究和工程实践成果等。报道新理论、新技术、新仪器、新材料的研究和应用。欢迎国家自然科学基金项目及其他重要项目的研究成果向本刊投稿,倡导和鼓励有实践经验的作者撰稿,并优先刊用这些稿件。主要栏目有黄文熙讲座、综述、论文、短文、工程实录、焦点论坛、讨论和简讯等。

本刊被《中文核心期刊要目总览》连续多年确认为核心期刊,并在建筑类核心期刊中位于前列;本刊被科技部“中国科技论文统计源期刊”(中国科技核心期刊)及“中国科技论文与引文数据库”收录;本刊被中国科学院“中国科学引文数据库”收录;本刊被“中国知网”全文收录及“中国学术期刊综合评价数据库”收录;本刊被“工程索引 Ei Compendex 数据

库”和“日本科学技术振兴机构数据库 JST”等国际数据库收录。本刊网址(www.cgejournal.com)全文发布本刊所有刊载文章。

本刊读者对象为土木建筑、水利电力、交通运输、矿山冶金、工程地质等领域中从事岩土工程及相关专业的科研人员、设计人员、施工人员、监理人员和大专院校师生。

本刊为月刊, A4 开, 双栏排版, 192 页, 每月中旬出版, 每期定价 40 元, 全年定价 480 元。

本刊国际标准刊号 ISSN 1000 - 4548, 国内统一刊号 CN 32 - 1124/TU, 国内发行代号 28 - 62, 国外发行代号 MO 0520。欢迎广大读者在全国各地邮局订购, 也可在编辑部订购(不另收邮费)。编辑部订购地址: 南京虎踞关 34 号《岩土工程学报》编辑部; 邮编: 210024; 联系电话: 025-85829534, 85829543, 85829553, 85829556; 传真: 025-85829555; E-mail: ge@nhri.cn。

《岩土工程学报》编辑部