

DOI: 10.11779/CJGE2020S1036

基于最小二乘和修正 Kumar 法的动模量计算方法

沈吉荣, 陈少林*

(南京航空航天大学土木与机场工程系, 江苏 南京 210016)

摘要: 目前常用的动模量计算方法往往在小应变时受白噪声干扰较大, 而大应变时滞回圈不对称, 导致无法准确计算土体动模量。使用最小二乘法计算小应变下的土体动模量; 采用调整系数对 Kumar 法进行修正, 从而计算大应变下土体的拉、压动模量。结果表明: 相较于传统滞回圈法, 最小二乘法拟合能有效克服白噪声对小应变幅值下动模量的影响, 并使得动三轴试验测试动模量的应变范围更宽; 而修正的 Kumar 算法能较好地计算强非线性下土体的拉、压动模量, 并与最小二乘法拟合结果完美契合。

关键词: 动模量; 最小二乘法; Kumar 法; 滞回圈法

中图分类号: TU435 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2020)S1-0183-05

作者简介: 沈吉荣(1993—), 男, 博士研究生, 主要从事土与结构相互作用方面的研究工作。E-mail: 2444282179@qq.com。

Method for dynamic modulus based on least square and modified Kumar methods

SHEN Ji-rong, CHEN Shao-lin

(Department of Civil Engineering and Airport Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Due to the large interference of white noise at small strains and the asymmetric loop with large strains, the current methods cannot accurately calculate the soil dynamic modulus. The least square method is used to calculate the dynamic modulus of the soils under small strain, and the Kumar method is modified by the adjustment coefficient to calculate the tensile and compression modulus under large strain. The results show that compared with the traditional hysteresis loop method, the least square fitting method can effectively overcome the influences of white noise on the dynamic modulus at small strain, and make the tested strain range of the dynamic modulus in the dynamic triaxial tests wider. The modified Kumar method can well calculate the tensile and compression moduli of the soil under strong nonlinearity case, and it is perfectly connected with the fitting results of the least square method.

Key words: dynamic modulus; least square method; Kumar method; hysteresis loop method

0 引言

土体的动模量作为衡量土体产生变形难易程度的指标, 也是场地地震反应分析的必备参数, 在土体动力分析时扮演着重要的角色^[1]。通常借助共振柱、动三轴、剪切仪或扭剪仪等室内试验设备对土体进行动力加载, 可得到土体的动应力-动应变曲线(滞回圈), 采用土体滞回圈两端顶点连线斜率表示动模量^[2-3]。但即便在仪器传感器足够灵敏的情况下, 每种室内试验都只能得到部分应变范围的动模量, 例如: 共振柱试验能得到土体 $10^{-6} \sim 10^{-4}$ 应变范围的动剪切模量; 动三轴或扭剪试验能得到土体 $10^{-4} \sim 10^{-2}$ 应变范围的动弹性(剪切)模量^[3-4]。因此, 为了完整地描述土体动模量随应变的变化情况, 经常会借助共振柱和动三轴对土体进行联合测试。但由于动弹性模量和动剪切模量之间需要泊松比建立关系, 且众多学者经研究表明,

土体泊松比随着应变幅值的变化而变化^[5-6], 这使得两种试验所得的结果无法直接串联。梁珂等^[7]基于相关函数理论提出了动模量阻尼比的新算法, 该方法有效拓宽了动模量在动三轴试验中的应变测试范围。但在实际应用中, 由于涉及到部分较为复杂的计算公式, 需要事先编写程序才能简便使用。

另外, 作为一种典型的非线性材料, 在应变幅值较大的情况下, 部分土体存在着拉、压模量不一致的情况, 该特性在滞回圈上表现为滞回圈的不对称性^[8]。但常规的滞回圈算法是基于理想的等效线性动黏弹性模型推导得出的, 无法准确计算不对称滞回圈的模量。Kumar 等^[9]针对大应变滞回圈不对称的情况, 将滞回

基金项目: 国家自然科学基金项目(51978337)

收稿日期: 2020-06-04

*通信作者(E-mail: iemcsl@nuaa.edu.cn)

圈视为拉、压两个部分，然后单独计算拉、压模量。然而 Kumar 仅使用该方法计算加载第一周的动模量，对于分级加载是否适用未做进一步的探究。因此在已有传感器精度的条件下，需要寻找一个简单有效，同时能计算大应变下土体拉、压模量的计算方法。

本文以黏土为试验对象，基于最小二乘法原理对小应变下的滞回圈进行拟合，有效地减少小应变下白噪声对模量计算的影响，提高结果的可信度。同时在 Kumar 模量计算方法的基础上进行修正，使其能准确计算大应变下、非线性特征较强的非对称滞回圈的拉、压模量。

1 动模量计算方法

为了探究非对称滞回圈拉、压模量的计算方法，于南京地区采集黏土样本开展动三轴试验，取样深度为 53.2~53.4 m。根据经验公式： $\sigma_c = 20 H/3$ (kPa)，将试样的有效围压设为 400 kPa，固结 24 h。式中， σ_c 为等效固结围压 (kPa)； H 为埋置深度 (m)，其基本物理参数如表 1 所示。

表 1 黏土物理参数

Table 1 Physical parameters of clay

颗粒相对密度	液限 /%	塑限 /%	塑性指数	天然含水率 /%	天然密度 /($g \cdot cm^{-3}$)
2.72	34	21	13	12	1.95

将试样于削样台制成直径 5 cm、高 10 cm 的实心试样，拟对试样施加 $1 \times 10^{-5} \sim 2 \times 10^{-3}$ 应变范围的动荷载，开展动三轴应变控制分级加载试验，每级施加 5 圈等幅应变荷载，加载频率为 0.5 Hz。李晓飞^[10]认为，试样中的累积孔压对模量存在影响，为了避免前期小应变加载产生的累积孔压对后续的模量测试产生影响，于试样四周贴上滤纸条，便于试样排出多余的孔隙水，维持试样内部孔压的稳定。最终试验所得各级应变的滞回圈如图 1 所示。

从图 1 可以看出，当应变小于 4×10^{-5} 时，滞回圈受随机振动干扰明显、表面粗糙；当应变大于 6×10^{-5} 时，滞回圈受到干扰的程度逐渐减弱，表面逐渐光滑。此外，当应变幅值较小时，土体近似呈线性状态，随着应变的增大，尤其是当应变大于 4×10^{-4} 时，土体非线性特征愈发显著，且滞回圈逐渐显示非对称性。

1.1 小应变下最小二乘法拟合计算模量

在常规的等效线性动黏弹性模型中，土体动模量是由滞回圈两个顶点连线的斜率所表示的。但在小应变幅值的情况下由于受到环境中的随机振动、电信号

干扰等因素，导致试验采集数据不稳定。

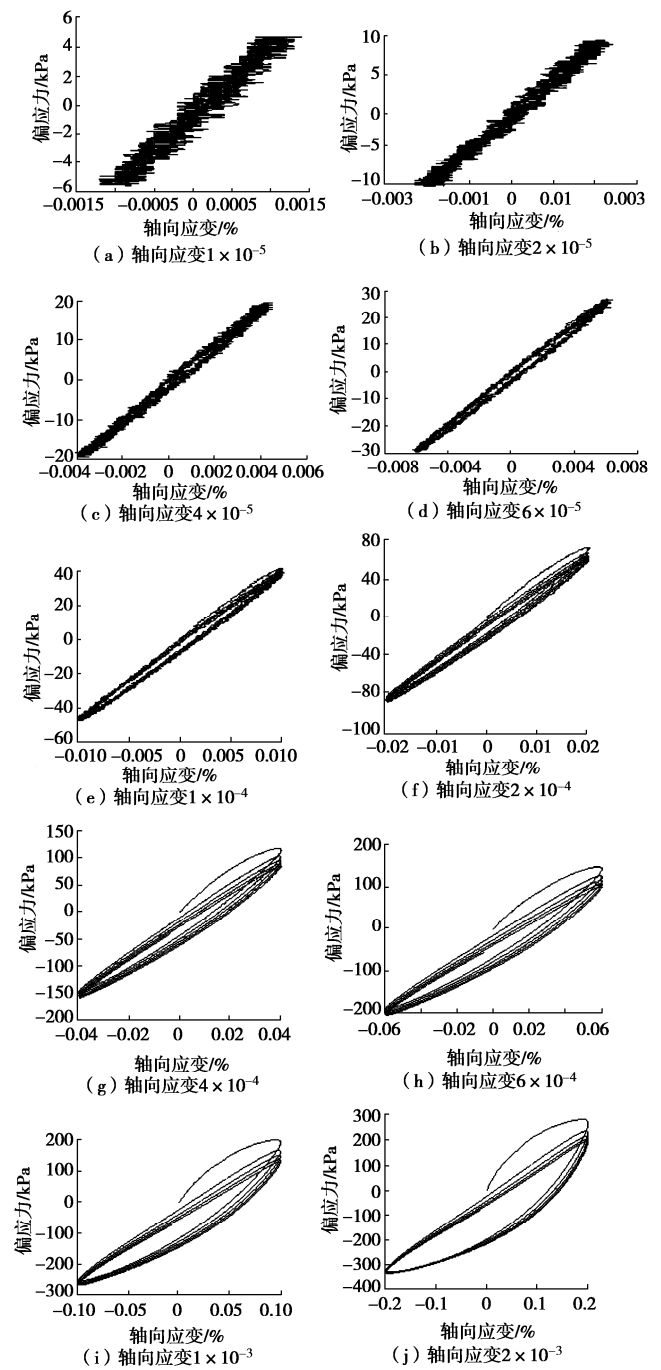


图 1 各级应变的滞回圈

Fig. 1 Hysteresis loops of strain at all levels

以 1×10^{-5} 应变量级下的试验曲线为例，由于应变幅值小，其应变时程曲线受白噪声干扰显著（如图 2 所示），最终导致滞回圈受到较为严重的干扰。假设仍以传统的滞回圈法计算，则得到的计算结果为 377 MPa（如图 2 红线所示），然而这显然与实际模量（如图 2 绿线所示）存在较大差距。为了减少白噪声对小应变下模量计算的干扰，提高准确率，借助最小二乘法拟合计算动模量。

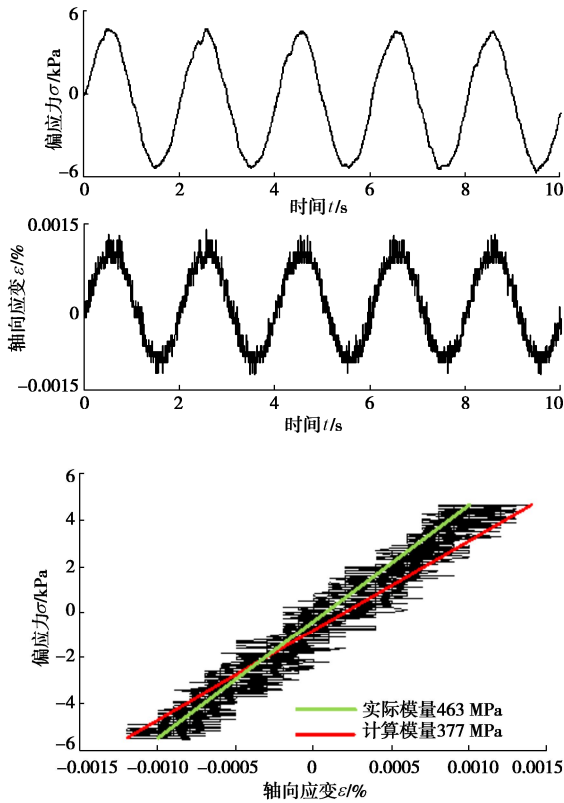


图 2 1×10^{-5} 应变量级下试验曲线

Fig. 2 Test curves at 1×10^{-5} strain level

设小应变下土体在 i 时刻的动应力 - 动应变关系满足

$$E\varepsilon_i + \sigma_0 = \sigma_i \quad (1)$$

若将前 n 个时刻的式 (1) 累加可得

$$E \sum_{i=1}^n \varepsilon_i + n\sigma_0 = \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (2)$$

而若在式 (1) 的两端同时乘以该时刻对应的应变可得

$$E\varepsilon_i^2 + \sigma_0\varepsilon_i = \sigma_i\varepsilon_i \quad (3)$$

同样的, 将前 n 个时刻的式 (3) 累加可得

$$E \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 + \sigma_0 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n \sigma_i \varepsilon_i \quad (4)$$

式中 n 为试验过程中每周采集点数; σ_0 为初始轴向应力; σ_i 为加载过程中 i 时刻的应力; ε_i 表示应力为 σ_i 时刻的应变。将式 (2)、(4) 联立消除含 σ_0 项即可解得拟合模量 E , 最终化简公式为

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - n \sum_{i=1}^n \sigma_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - n \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad (5)$$

计算结果如图 3 所示。

图 3 对比了最小二乘法与滞回圈法的计算结果。由图 3 可知, 在小应变情况下, 受到白噪声的干扰, 滞回圈法计算所得的模量偏小。而最小二乘法对滞回圈斜率进行线性拟合能够较好的描述小应变下土体模

量的变化情况。而随着应变逐渐增大, 白噪声对应变测量精度的干扰逐渐减少, 因此两种算法的计算结果逐渐接近。当应变等于 1×10^{-4} 时, 拟合模量与滞回圈法计算模量几乎一致, 此时滞回圈清晰可见, 几乎不受白噪声影响。此方法原理简单、易于直接使用, 且一定程度上减小了噪声对于动模量的影响, 使得小应变情况下所得模量更符合实际。

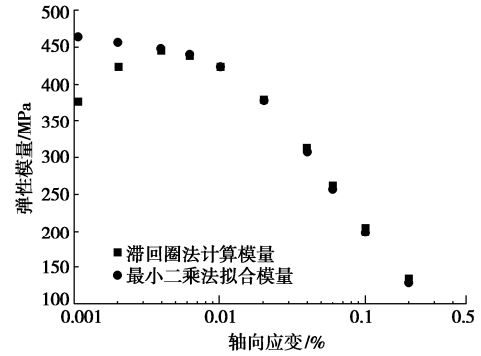


图 3 最小二乘法与滞回圈法计算结果对比

Fig. 3 Comparison between results of least square method and hysteretic loop method

1.2 大应变下修正 Kumar 法计算模量

当应变幅值逐渐增大时, 土体逐渐进入非线性阶段, 此时滞回圈的非对称性不断增强。为了计算具有明显非线性特征时土体滞回圈的拉、压模量, Kumar^[9]给出了一种新的模量计算方式, 计算原理示意图如图 4 所示。

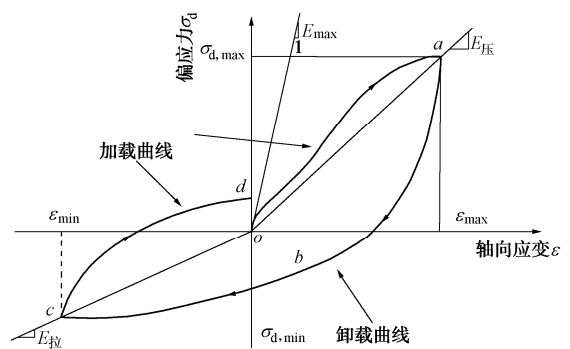


图 4 Kumar 法计算原理

Fig. 4 Calculation principle of Kumar method

Kumar 法将滞回圈起点与压方向的顶点连线的斜率作为动压缩模量 $E_{压}$ (图 4 中线段 oa 的斜率), 与拉方向顶点连线的斜率作为动拉伸模量 $E_{拉}$ (图 4 中线段 oc 的斜率)。以 2×10^{-3} 应变幅值时的滞回圈作为测试, 每周滞回圈以及 Kumar 法计算结果如图 5 所示。

由图 5 可知, 若按照 Kumar 法直接计算大应变下滞回圈拉、压模量, 会出现拉模量大于压模量的结果。然而已有研究表明, 黏土的非线性显著, 且抗压强度高于抗拉强度^[11], 这使得计算结果与实际情况相违

背。这是因为 Kumar 法默认滞回圈的起点是从骨架曲线原点出发，而在实际加载过程中，由于前期小应变的应力加载，导致试样产生了一定的累积塑性应变。虽然在每一应变等级加载前都会重新固结，恢复固结状态，但滞回圈仍然难以从新的骨架曲线原点出发。为了解决这一问题，尝试对 Kumar 法进行修正，修正方法如图 6 所示。

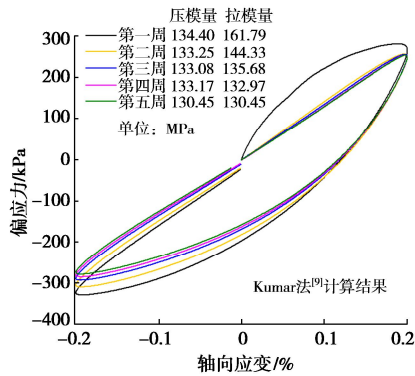


图 5 2×10^{-3} 应变等级下 Kumar 法计算结果

Fig. 5 Calculated results of Kumar method at 2×10^{-3} strain level

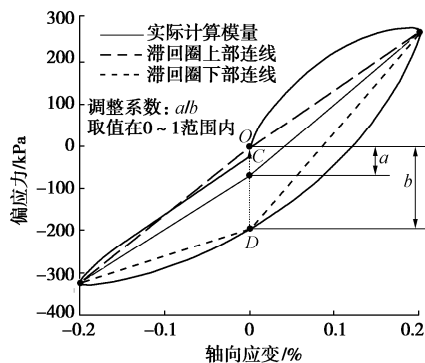


图 6 修正 Kumar 法计算原理

Fig. 6 Calculation principle of modified Kumar method

将滞回圈起点作为 O 点，向下作垂线与滞回圈卸载曲线相交于 D 点，C 为线段 OD 中的某一点。当 C 点在骨架曲线原点处时，便能根据 C 点与两端顶点连线准确计算出拉、压模量。若 C 点偏高，则会导致拉模量偏大、压模量偏小；若 C 点偏低，则会导致拉模量偏小、压模量偏大。为了找到 C 点位置，定义调整系数为 a/b ，即 OC/OD ，从而描述 C 点的位置，取值范围在 0~1。在理想的等效线性动黏弹性模型中，调整系数为 0.5，然而在不对称性较强的滞回圈中，调整系数的值仍需进一步讨论。

由各级应变下的滞回圈可知，当应变不大于 1×10^{-4} 时，土体非线性特征较弱，此时土体经历的荷载扰动较小，并且几乎没有塑性应变产生，更接近于土体的初始状态。此外，小应变下的土体更接近于线弹性材料，其滞回圈两端连线应经过骨架曲线原点。因

此，可以借助小应变时土体的滞回圈求得骨架曲线原点的位置，即 C 点的位置。

图 7 展示了 6×10^{-5} 应变等级下的滞回圈。将滞回圈两端顶点连线得到如图红线，然后如图 6 所述方式计算调整系数，最终所得调整系数为 0.21。鉴于调整系数是在小应变情况下计算得出，因此既能对大应变情况下拉、压模量起到修正作用，又能保证小应变时拉模量等于压模量，从而与最小二乘法拟合所得模量相吻合。将所得调整系数应用于大应变下拉、压模量的计算，再将小应变下最小二乘法拟合所得的模量相结合，得到的计算结果如图 8 所示。

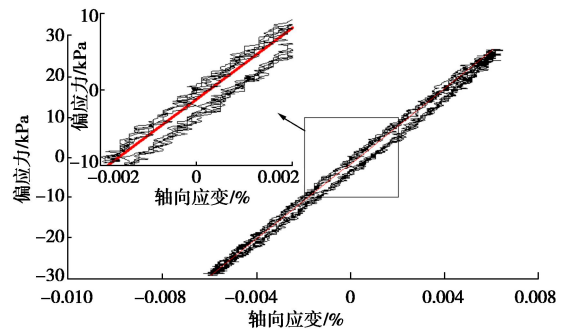


图 7 6×10^{-5} 应变等级下滞回圈

Fig. 7 Hysteresis loops at 6×10^{-5} strain stage

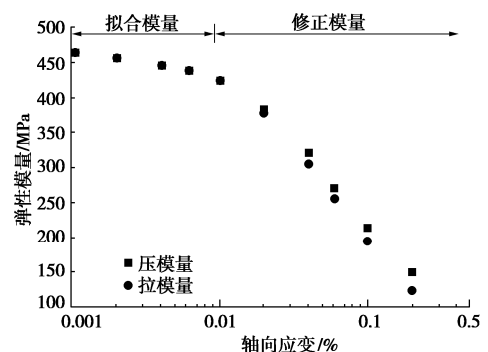


图 8 两种方法共同计算动模量的结果

Fig. 8 Results of dynamic modulus calculated by two methods

从图 8 可知，采用小应变下计算调整系数，然后应用于大应变时拉、压模量计算的方法能有效修正 Kumar 法，使得计算结果更为真实可信。而两种方法的组合也能较好地描述不对称滞回圈的拉、压模量的变化情况。

最终将计算方法总结为：在小应变情况下，修正的 Kumar 模型会由于白噪声的干扰导致计算所得模量偏小，因此采用最小二乘法对此时的模量进行拟合。此时土体近似于线弹性，可认为拉模量等于压模量；当应变逐渐增大时，土体非线性特征逐渐显现，最小二乘法与滞回圈法均无法准确描述模量变化情况。因此先借助小应变时的滞回圈计算调整系数，再采用修正 Kumar 方法计算大应变时的拉、压模量。将两种计

算方法所得模量进行组合, 共同完成较宽应变范围的模量计算。

2 结 论

无论是小应变幅值下受白噪声干扰显著的滞回圈, 还是大应变下非对称特征显著的滞回圈, 常规的滞回圈法在计算动模量时均容易出现失真。针对此问题, 本文提出使用最小二乘法和修正 Kumar 法联合计算宽应变范围、非对称滞回圈动模量的计算方法, 得到以下 3 点结论。

(1) 使用最小二乘法拟合能够有效克服小应变时白噪声对模量计算的影响, 使得动三轴的模量测试范围能向前延伸至 1×10^{-5} 。

(2) 在小应变情况下计算调整系数, 然后计算动模量的修正 Kumar 法能有效计算大应变时非对称滞回圈的拉、压模量。

(3) 采用小应变使用最小二乘法拟合、大应变使用修正 Kumar 法的联合计算方式能够兼具两者优势: 延伸计算应变宽度的同时, 解决非对称滞回圈模量计算不准确的问题。

参考文献:

- [1] 陈国兴. 岩土地震工程学[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (CHEN Guo-xing. Geotechnical Earthquake Engineering[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese))
- [2] CHEN Guo-xing, ZHOU Zheng-long, SUN Tian, et al. Shear modulus and damping ratio of sand-gravel mixtures over a wide strain range[J]. Journal of Earthquake Engineering, 2019, **23**(8): 1407 - 1440.
- [3] 孙 静, 袁晓铭. 土的动模量和阻尼比研究述评[J]. 世界地震工程, 2003, **19**(1): 88 - 95. (SUN Jing, YUAN Xiao-ming. A state-of-art of research on dynamic modulus and damping ratio of soils[J]. World Earthquake Engineering, 2003, **19**(1): 88 - 95. (in Chinese))
- [4] 贺为民, 李德庆, 杨 杰, 等. 土的动剪切模量、阻尼比和泊松比研究进展[J]. 地震工程学报, 2016, **38**(2): 309 - 317. (HE Wei-min, LI De-qing, YANG Jie, et al. Recent progress in research on dynamic shear modulus, damping ratio, and poisson ratio of soils[J]. China Earthquake Engineering Journal, 2016, **38**(2): 309 - 317. (in Chinese))
- [5] KOKUSHO T. Cyclic triaxial test of dynamic soil properties for wide strain range[J]. Soils and Foundations, 1980, **20**(2): 45 - 60.
- [6] 王炳辉, 陈国兴, 胡庆兴. 南京细砂动剪切模量和阻尼比的试验研究[J]. 世界地震工程, 2010, **26**(3): 7 - 15. (WANG Bing-hui, CHEN Guo-xing, HU Qing-xing. Experiment of dynamic shear modulus and damping of Nanjing Fine Sand[J]. World Earthquake Engineering, 2010, **26**(3): 7 - 15. (in Chinese))
- [7] 梁 珂, 陈国兴, 何 杨, 等. 基于相关函数理论的动模量和阻尼比计算新方法[J]. 岩土力学, 2019, **40**(4): 1368 - 1376. (LIANG Ke, CHEN Guo-xing, HE Yang, et al. A new method for calculation of dynamic modulus and damping ratio based on theory of correlation function[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, **40**(4): 1368 - 1376. (in Chinese))
- [8] 李瑞山, 陈龙伟, 袁晓铭, 等. 荷载频率对动模量阻尼比影响的试验研究[J]. 岩土工程学报, 2017, **39**(1): 71 - 80. (LI Rui-shan, CHEN Long-wei, YUAN Xiao-ming, et al. Experimental study on influences of different loading frequencies on dynamic modulus and damping ratio[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, **39**(1): 71 - 80. (in Chinese))
- [9] KUMAR S S, KRISHNA A M, DEY A. Evaluation of dynamic properties of sandy soil at high cyclic strains[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2017, **99**: 157-167.
- [10] 李晓飞. 土动力参数的测试误差与孔压影响研究[D]. 哈尔滨: 中国地震局工程力学研究所, 2017. (LI Xiao-fei. Study on the Test Error and Pore Pressure Influence of Soil Dynamic Parameters[D]. Harbin: Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, 2017. (in Chinese))
- [11] YASUHARA K, HIRAO K, HYDE A F L. Effects of cyclic loading on undrained strength and compressibility of clay[J]. Soils and Foundations, 1992, **32**(1): 100 - 116.

(编校: 孙振远)