

DOI: 10.11779/CJGE202005011

砂土非共轴本构模型及其在地基承载力方面的应用

王兴¹, 孔亮^{2*}, 李学丰³

(1. 青岛理工大学土木工程学院, 山东 青岛 266033; 2. 青岛理工大学理学院, 山东 青岛 266033; 3. 宁夏大学固体力学研究所, 宁夏 银川 750021)

摘要: 传统弹塑性模型隐含了塑性应变率与应力方向共轴的假设, 无法模拟砂土在非比例加载条件下的非共轴特性。对传统模型隐含的共轴假设进行了剖析, 将 Hashiguchi 等的广义非共轴塑性流动理论引入 Li 等建立的砂土状态相关膨胀模型中, 构建了一个砂土的非共轴模型。Leighton-Buzzard 砂的单剪试验模拟表明, 非共轴模型能够更加合理地描述试验结果。开发了相应的有限元程序, 利用所建模型对不同孔隙比条件下的砂土地基承载力问题进行了模拟。探讨了非共轴参数取值对计算结果的影响, 总体上预测结果展现出与单剪试验模拟相一致的规律。

关键词: 砂土; 非共轴; 单剪试验; 地基承载力

中图分类号: TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 4548(2020)05 - 0892 - 08

作者简介: 王兴(1988—), 男, 博士研究生, 主要从事岩土本构关系方面的研究。E-mail: 1306825892@qq.com。

Three-dimensional non-coaxial constitutive model for sand and its application in bearing capacity of foundation

WANG Xing¹, KONG Liang^{2*}, LI Xue-feng³

(1. School of Civil Engineering, Qingdao Technological University, Qingdao 266033, China; 2. School of Sciences, Qingdao Technological University, Qingdao 266033, China; 3. Solid Mechanics Institute, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: Due to the coaxial assumption that the direction of plastic strain rate is the same as that of stress, the non-coaxial behavior of sand under non-proportional loading conditions can not be captured by the conventional elastic-plastic model. In this study, firstly the cause of coaxial hypothesis contained in the traditional model is analyzed. Then, a non-coaxial model for sand is constructed by introducing the generalized non-coaxial plastic flow theory developed by Hashiguchi et al into the state-dependent dilatancy model for sand established by Li et al. The simulation of simple shear tests on Leighton-Buzzard sand shows that the non-coaxial model can describe the experimental results more reasonably. The corresponding finite element program is developed, the bearing capacity of sand foundation under different void ratios is analyzed by using the proposed model. The influence of non-coaxial parameters on the calculation results is discussed, and the predicted results demonstrate similar characteristics with those of simple shear test simulation on the whole.

Key words: sand; non-coaxiality; simple shear test; bearing capacity of foundation

0 引言

岩土材料的本构模型在有限元仿真当中扮演着核心角色, 其合理性与否直接决定着有限元计算结果的精度。在传统岩土弹塑性模型中, 塑性势函数通常表示为主应力或应力不变量的函数并结合正交流动法则确定塑性应变率的方向, 这一过程隐含了塑性应变率与应力的共轴性假设。该假设与含主应力轴旋转加载条件下岩土材料的变形规律并不吻合^[1]。

主应力轴方向的改变会显著影响土体的变形特性, 这一点早已被土力学的学者所认识到^[2-4]。众多研究者进行了大量试验, 研究含主应力轴旋转条件下土体的变形规律, 例如 Miura 等^[5]、Ishihara 等^[6]的空心圆柱扭剪试验表明, 主应力轴旋转条件下产生的塑性应

变增量方向与应力方向明显不同。Gutierrez 等^[7-8]对 Toyoura 砂进行的应力探测试验表明: 即便在应力幅值保持不变的条件下, 单纯的主应力方向改变也会引起砂土产生塑性变形, 并且应力的方向通常滞后于塑性应变率的方向, 但二者之间的非共轴程度随着应力比的增加而逐渐变弱。Li 等^[9]开展的细观试验也证明了主应力轴旋转条件下颗粒材料的变形存在显著的非共轴性。传统的共轴弹塑性模型并不能描述这一现象。针对这一不足, 国内外学者提出了多种新模型来模拟

基金项目: 国家自然科学基金项目(51778311, 11572165); 宁夏重点研发项目(2018DWHZ0084)

收稿日期: 2019 - 06 - 08

*通信作者 (E-mail: qdkongliang@163.com)

应力与塑性应变率之间的非共轴特点。其中一大类是建立在由 Rudnicki 等^[10]提出的屈服角点理论基础上。该理论认为非共轴塑性应变率是由屈服函数切线方向的应力率所引发的。基于该理论, Yang 等^[11-13]分别结合 Drucker-Prager 模型和临界状态土力学模型 CASM 模拟了单剪试验中砂土的非共轴变形行为; 罗强等^[14]在应变软化的 Drucker-Prager 模型中引入带角点结构的塑性流动理论, 对密砂的单剪试验进行了模拟分析。但由于该理论早期定义的切线应力率是基于二维应力空间, 并不适用于三维化的模型, 国内学者钱建固等^[15]应用 Gram-Schmidt 张量正交化理论, 发展了三维的非共轴塑性流动理论; 李学丰等^[16]利用该方法建立了一个砂土的非共轴模型, 但没有将其应用于工程分析; 基于钱建固等的研究成果, 陈洲泉等^[17-18]提出了一个能够计算定向剪切条件下非共轴变形的砂土模型, 然而 Dafalias 等^[19]指出在该加载模式下是否应当考虑非共轴性仍是一个值得商榷的问题。Hashiguchi 等^[20-22]发展了广义的非共轴塑性流动理论, 建立了适用于黏土且能够考虑非共轴塑性变形的次加载面模型。此外, 一些学者包括 Gao 等^[23]、Tian 等^[24]从各向异性角度对砂土非共轴性进行了研究。

虽然目前为止已经建立了一些砂土的非共轴模型, 但大多数文献中并未对传统弹塑性模型所隐含的共轴假设给出详细的论证, 此外将建立的非共轴模型应用于工程分析的情况也并不多见。因此, 笔者首先对传统弹塑性模型隐含的共轴性假设进行剖析, 然后将 Hashiguchi 等^[20-22]发展的广义非共轴塑性理论引入 Li 等^[25]提出的砂土状态相关剪胀模型, 建立砂土的非共轴本构模型; 通过已有的砂土单剪试验数据检验模型的合理性, 并利用所建模型对砂土地基的承载力问题进行分析, 探究考虑非共轴塑性变形对计算结果的影响。

1 共轴性假设剖析

1928 年 Mises 通过类比弹性势的概念提出了塑性势的概念^[1], 随后建立的德鲁克公设表明, 屈服函数与塑性势函数等价; 塑性应变率的方向必定沿着屈服面的法线方向, 即正交流动法则, 其数学表达式为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = L \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (1)$$

式中, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 为塑性应变率张量, $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量, f 为屈服函数, L 为加载指标, 由一致性条件确定。

传统的岩土弹塑性模型继承了这一正交流动法则, 并且通常视土体为各向同性材料, 将屈服函数与塑性势函数表示为应力不变量的函数。这种表示方式的便捷之处是只需在某一固定坐标系下建立土体的屈

服规律和塑性流动规律, 当坐标系发生改变时, 建立的准则仍然适用, 但却隐性地规定了塑性应变增量方向必须与应力方向共轴。为了对此进行更加清楚的说明, 假设塑性势函数的一般形式为

$$g = g(I_1, J_2, J_3, H) \quad (2)$$

式中 3 个应力不变量分别为 $I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$, $J_2 = \text{tr}(\boldsymbol{s}^2)/2$, $J_3 = \text{tr}(\boldsymbol{s}^3)/3$; H 为硬化变量; \boldsymbol{s} 为偏应力张量。由正交流动法则, 塑性应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= L \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = L \left(\frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \\ &= L \left[\left(\frac{\partial g}{\partial I_1} - \frac{\partial g}{\partial J_2} \frac{2}{3} J_2 \right) \boldsymbol{I} + \frac{\partial g}{\partial J_2} \boldsymbol{s} + \frac{\partial g}{\partial J_3} \boldsymbol{s}^2 \right] \\ &= L(a_1 \boldsymbol{I} + a_2 \boldsymbol{\sigma} + a_3 \boldsymbol{\sigma}^2) \quad (3) \end{aligned}$$

式中, \boldsymbol{I} 为二阶单位张量, 3 个系数分别为 $a_1 = \frac{\partial g}{\partial I_1} - \frac{\partial g}{\partial J_2} \frac{I_1}{3} + \frac{\partial g}{\partial J_3} \left(\frac{I_1^2}{9} - \frac{2}{3} J_2 \right)$, $a_2 = \frac{\partial g}{\partial J_2} - \frac{\partial g}{\partial J_3} \frac{2}{3} I_1$, $a_3 = \frac{\partial g}{\partial J_3}$ 。

设 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$ 分别为应力张量 3 个主方向上的单位基矢量, 则必然存在某一单位正交张量 \boldsymbol{Q} 可以将应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 转化为主应力张量的形式, 即

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^T = \sigma_1 \boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{n}_1 + \sigma_2 \boldsymbol{n}_2 \otimes \boldsymbol{n}_2 + \sigma_3 \boldsymbol{n}_3 \otimes \boldsymbol{n}_3, \quad (4)$$

式中, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别为应力张量的 3 个主值。将塑性应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 两侧点积张量 \boldsymbol{Q} , 并利用 \boldsymbol{Q} 的正交性质 $\boldsymbol{Q}^T \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$, 则可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \boldsymbol{Q}^T &= L \boldsymbol{Q} \cdot (a_1 \boldsymbol{I} + a_2 \boldsymbol{\sigma} + a_3 \boldsymbol{\sigma}^2) \cdot \boldsymbol{Q}^T \\ &= L(a_1 \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{Q}^T + a_2 \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^T + \\ &\quad a_3 \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^T \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^T) \\ &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^p \boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{n}_1 + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^p \boldsymbol{n}_2 \otimes \boldsymbol{n}_2 + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^p \boldsymbol{n}_3 \otimes \boldsymbol{n}_3 \quad (5) \end{aligned}$$

式中, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^p = L(a_1 + a_2 \sigma_i + a_3 \sigma_i^2)$, ($i=1,2,3$) 为塑性应变率张量的 3 个主值。式 (5) 表明, 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 与塑性应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 在同一组基矢量中化为主张量的形式, 即二者有相同主方向, 因此按照传统位势理论计算的塑性应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 总是与应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 共轴。

2 砂土的三维非共轴本构模型

由于在非比例加载条件下会涉及到三维应力状态, 需要将模型三维化^[19,26-27]。本文选择在偏平面上插入角隅函数的方法实现这一目的。

2.1 弹性部分

模型的剪切模量 G 、体积模量 K 都与砂土密度和平均应力 p 有关, 其表达式为

$$G = G_0 \frac{(2.97 - e)^2}{1 + e} \sqrt{pp_a} \quad (6)$$

$$K = G \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \quad (7)$$

式中, G_0 为材料常数, e 为当前孔隙比, p_a 为大气压力, ν 为泊松比。

2.2 状态变量

模型的状态变量采用 Been 等^[28]提出的形式, 其定义为相同压力下当前孔隙比与临界孔隙比的差值, 即

$$\psi = e - e_c, \quad (8)$$

式中, e_c 为临界孔隙比。对于砂土, Li 等^[25]提出了一个适用范围较广的形式, 其数学形式为

$$e_c = e_r - \lambda_c (p/p_a)^\xi, \quad (9)$$

式中, e_r , λ_c 和 ξ 为 3 个材料常数。

2.3 屈服函数与塑性模量

屈服函数采用广义 Mohr-Coulomb 形式, 即

$$f = q - Mg(\theta)p = 0. \quad (10)$$

式中 $p = I_1/3$; $q = \sqrt{3J_2}$; M 为硬化内变量; 应力罗德角 $\theta = \sin^{-1}(3\sqrt{3}J_3/2J_2^3)/3$; $g(\theta)$ 为引入的角隅函数, 这里采用 Li 等^[29]建议的形式:

$$g(\theta) = \frac{\sqrt{(1+c^2)^2 + 4(1-c^2)\sin 3\theta} - (1+c^2)}{2(1-c)\sin 3\theta}, \quad (11)$$

式中, $c = M_c/M_c$, M_e , M_c 分别为三轴拉伸与压缩条件下的应力比比值。

模型中定义了一个状态相关的塑性模量 K_p , 可以表示为

$$K_p = hG_e^{m\nu} \left[\frac{M_{cs}g(\theta)e^{-m\nu}}{\eta} - 1 \right]. \quad (12)$$

式中 M_{cs} 为临界状态应力比; 应力比 $\eta = q/p$; n 为材料常数; Li 等^[29]建议 h 取为孔隙比的函数 $h = h_1 - h_2e$, h_1 , h_2 为 2 个材料常数。

2.4 剪胀方程

剪胀方程表示为塑性体应变率 $\dot{\varepsilon}_v^p$ 与广义塑性剪应变率 $\dot{\varepsilon}_q^p$ 之比, 具体形式为

$$d = \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_q^p} = \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{L} = \frac{d_0}{M_{cs}g(\theta)} \left[M_{cs}g(\theta)e^{m\nu} - \eta \right], \quad (13)$$

式中, d_0 , m 为 2 个材料常数。上述剪胀方程的等效势函数为

$$g = q - \frac{d_0 M_{cs} g(\theta) p}{d_0 - M_{cs} g(\theta)} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{d_0}{M_{cs} g(\theta)} - 1} \right], \quad (14)$$

式中, p_0 为塑性势面与 p 轴的交点。

2.5 硬化规律

根据式 (10), 由一致性条件可得

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_q^p} \dot{\varepsilon}_q^p = 0, \quad (15)$$

式中, $\dot{\sigma}$ 为应力率张量。根据塑性理论^[30]

$$\dot{\varepsilon}_q^p = L = \frac{1}{K_p} \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma}. \quad (16)$$

结合式 (12), (15), (16), 可得

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_q^p} = \frac{hG_e^{m\nu}}{g(\theta)p} \left[\frac{M_{cs}g(\theta)e^{-m\nu}}{\eta} - 1 \right]. \quad (17)$$

2.6 非共轴塑性应变率

与传统塑性理论不同, Rudnicki 等^[10]提出的屈服角点理论将总塑性应变率分解为共轴塑性应变率和沿屈服函数切线方向的塑性应变率之和, 则总应变率张量 $\dot{\varepsilon}$ 为

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^{pc} + \dot{\varepsilon}^{pt}. \quad (18)$$

式中 $\dot{\varepsilon}^e$ 为弹性应变率张量; $\dot{\varepsilon}^{pc}$ 为共轴塑性应变率张量, 由传统塑性位势理论确定; $\dot{\varepsilon}^{pt}$ 为非共轴塑性应变率张量, Rudnicki 等^[10]认为 $\dot{\varepsilon}^{pt}$ 与静水压力部分无关, 其方向沿着屈服函数切线方向并与 \mathbf{s} 正交, $\dot{\varepsilon}^{pt}$ 的表达式为

$$\dot{\varepsilon}^{pt} = \frac{1}{H_t} \left(\dot{\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{s} : \dot{\mathbf{s}}}{\mathbf{s} : \mathbf{s}} \mathbf{s} \right), \quad (19)$$

式中, H_t 为非共轴塑性模量, $\dot{\mathbf{s}}$ 为偏应力率张量。然而式 (19) 由于没有考虑第三应力不变量的影响, 并不适用于一般化的三维模型。

Hashiguchi 等^[20-22]发展了适用于三维应力空间的广义非共轴塑性流动理论, 并假设非共轴塑性应变率张量与偏切线应力率张量之间为线性关系, $\dot{\varepsilon}^{pt}$ 可表示为

$$\dot{\varepsilon}^{pt} = TE_e^{-1} : \dot{\mathbf{s}}_t, \quad (20)$$

式中, T 为一个无量纲的标量系数, E_e 为弹性刚度张量, $\dot{\mathbf{s}}_t$ 为偏切线应力率张量, 如图 1 所示。Gutierrez 等^[7-8]的研究表明, 当应力比接近临界应力比时, 非共轴现象逐渐减弱, 因此通常情况下非共轴系数并不是一个常量。Hashiguchi 等^[20-22]将非共轴系数表达为相似比的指数函数; Yang 等^[11]建议将 T 表示为广义塑性剪应变的指数函数, 并指出这种表示形式可显著提高非共轴模型的收敛性。本文中, T 取如下形式:

$$T = T_0 \exp(-\chi \varepsilon_q^p), \quad (21)$$

式中, T_0 为 T 的初始值, χ 为材料常数。

如图 1 所示, 偏切线应力率张量 $\dot{\mathbf{s}}_t$ 可以由下式计算:

$$\dot{\mathbf{s}}_t = \bar{\mathbf{I}}_t' : \dot{\sigma} = \dot{\mathbf{s}} - \dot{\mathbf{s}}_n, \quad (22a)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_t' = \bar{\mathbf{I}}' - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (22b)$$

$$\mathbf{n} = \left(\bar{\mathbf{n}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{n}}) \mathbf{I} \right) / \left\| \bar{\mathbf{n}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{n}}) \mathbf{I} \right\|, \quad (22c)$$

$$\bar{\mathbf{n}} = (\partial f / \partial \sigma) / \left\| (\partial f / \partial \sigma) \right\|. \quad (22d)$$

式中 $\bar{\mathbf{n}}$ 为屈服面的外法线方向; \mathbf{n} 为偏法线方向; $\dot{\mathbf{s}}_n$ 为偏法线应力率张量; $\bar{\mathbf{I}}'$ 为偏投影张量, 其分量形式

为 $\bar{I}_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2 - \delta_{ij}\delta_{kl}/3$, δ_{ij} 为 Kronecker 符号; \bar{I}_t 为偏切线投影张量。结合式(16), (18), (20), (22a), 总应变率张量可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\mathbf{E}_e^{-1} + \frac{1}{K_p} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + T \mathbf{E}_e^{-1} : \bar{\mathbf{I}}_t \right) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (23)$$

对式(23)求逆可得非共轴弹塑性本构关系:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_{ep}^{nc} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\mathbf{E}_{ep} - \frac{T}{1+T} \bar{\mathbf{I}}_t : \mathbf{E}_{ep} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (24a)$$

$$\mathbf{E}_{ep} = \mathbf{E}_e - \frac{\mathbf{E}_e : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}_e}{K_p + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}_e : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (24b)$$

式中, \mathbf{E}_{ep} 为共轴弹塑性刚度张量, \mathbf{E}_{ep}^{nc} 为非共轴弹塑性刚度张量。

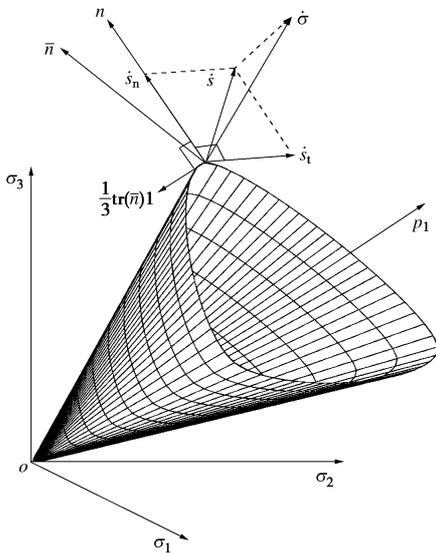


图 1 主应力空间内的偏切线应力率示意图

Fig. 1 Deviatoric tangential stress rate illustrated in principal stress space

3 模型的验证

为展示考虑非共轴塑性应变的影响并验证模型的合理性, 采用上述建立的砂土非共轴模型对 Leighton-Buzzard 砂的单剪试验进行模拟。单剪试验结果来自文献[31], 与 Li 等^[25]模型相关的参数选择蔡正银等在文献[32]中给出的参数值, χ 的值参考 Yang 等^[11]的研究取为 20, 由于单剪试验中, 一般很难获得塑性应变增量的大小, 因此 T_0 的值通常需根据试验曲线拟合确定, 具体参数见表 1。蔡正银等^[32]用于确定试验参数的 Leighton-Buzzard 砂为粉细砂, 其粒径范围为 0.09~0.15 mm, 颗粒相对密度为 2.65, 最大和最小干密度分别为 1.59, 1.32 g/cm³, 对应的最大和最小孔隙比分别为 $e_{max} = 1.0$ 和 $e_{min} = 0.67$, 而文献[31]的单剪试验中, Leighton-Buzzard 砂的初始孔隙比 e_0 分

为 0.53, 0.64, 0.75 共 3 种, 该砂的最大、最小孔隙比显然与文献[32]中的砂并不相同, 因此对部分模型参数进行了调整, 将 $e_r = 0.998$, $n=1.45$, $M_{cs} = 1.185$ 分别调整为 $e_r = 0.908$, $n=1.15$, $M_{cs} = 1.105$ 。调整该 3 个参数的主要原因是文献[31]中 e_0 为 0.53, 0.64, 0.75 时, 分别对应于密砂、中密砂、松砂, 而按照文献[32]中提供的原始模型参数, 这 3 种孔隙比都对应于密砂情况。通过调整 e_r 可使砂在这 3 种初始孔隙比情况下的应力应变曲线与典型的密砂、中密砂、松砂的应力应变曲线相对应; 由于峰值应力比对应于 $K_p = 0$, 而 K_p 对于参数 n 是较为敏感的, 因此调节参数 n , M_{cs} 以使预测的峰值应力比和临界应力比与试验数据基本一致。

表 1 Leighton-Buzzard 砂的模型参数

Table 1 Model parameters of Leighton-Buzzard sand			
弹性参数	临界状态参数	剪胀参数	非共轴参数
$G_0 = 150$	$M_{cs} = 1.105$	$d_0 = 0.52$	$T_0 = 10$
$\nu = 0.35$	$e_r = 0.908$	$m = 2.42$	$\chi = 20$
	$\lambda = 0.0198$	$n = 1.15$	
	$\xi = 0.68$	$h = 0.62$	

试验共分为 3 组, 对应 Leighton-Buzzard 砂的初始孔隙比 e_0 分别为 0.53, 0.64, 0.75, 静止侧压力系数 $K_0 = 0.5$, 竖向应力 $\sigma_y = 100$ kPa。试验过程中, 水平应变 $\varepsilon_x = 0$, 竖向应力 σ_y 保持不变。加载过程中研究主应力方向偏转角 α , 主塑性应变率方向偏转角 β , 如图 2 所示, 其中 α 与 β 的定义分别为

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} \quad (25a)$$

$$\tan 2\beta = \frac{2\varepsilon_{xy}^p}{\varepsilon_y^p - \varepsilon_x^p} \quad (25b)$$

式中, σ_x 为水平向应力, τ_{xy} 为剪应力, ε_x^p , ε_y^p 分别为水平与竖直向塑性应变率, ε_{xy}^p 为塑性剪应变率。

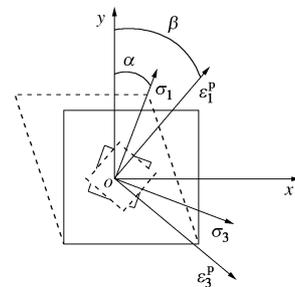
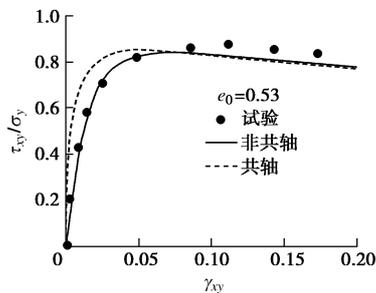


图 2 单剪试验中的主应力方向和塑性应变率方向

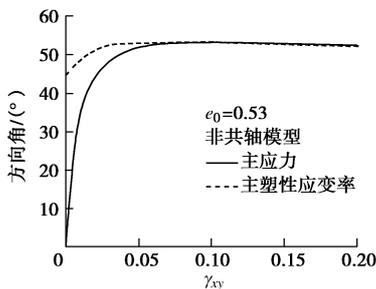
Fig. 2 Directions of principal stress and plastic strain rate in simple shear tests

图 3 为模拟结果与试验结果的对比。由图 3 (a), (c), (e) 可以看出, 在加载前期, 非共轴项的影响

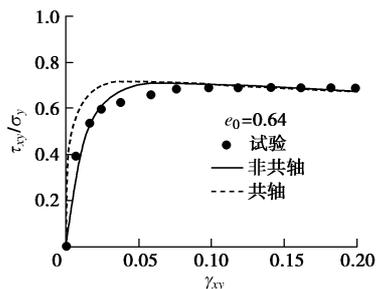
较为显著,非共轴模型预测的归一化应力比小于共轴模型的预测值,随着剪应变的增加,非共轴项的影响逐渐减弱,当剪应变 $\gamma_{xy} > 0.05$ 后,非共轴模型与共轴模型预测的应力-应变曲线基本重合。由式(24)可知,由于非共轴模型比共轴模型多了非共轴塑性应变项,在相同的应力增量条件下,非共轴模型将计算出更大的应变增量,因此预测的应力-应变曲线初始斜率减小,表现出刚度降低,更接近试验结果。图3(a), (c), (e)中,共轴模型预测的峰值应力比分别为0.85, 0.72, 0.615,非共轴模型预测结果分别为0.84, 0.71, 0.61。考虑非共轴影响,峰值应力比会有所下降,减弱模型的软化效应,但是程度很小,因此考虑非共轴塑性应变基本不影响峰值应力比,也不改变最终的临界应力比,但会延缓峰值应力的出现。对不同密度砂土而言,非共轴塑性应变的影响并不存在明显的差异。由图3(b), (d), (f)可以发现,主应力方向与主塑性应变率方向从开始加载就存在偏离。在加载早期阶段,应力的方向落后于塑性应变率的方向,随着剪应变的增加,应力比接近临界应力比时,主应力方向与塑性应变率方向之间的差别消失。非共轴模型能够反映主应力与主塑性应变率之间的非共轴情况,而共轴模型不能模拟这一现象。



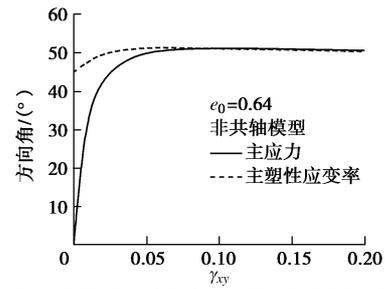
(a) 应力应变关系(密砂)



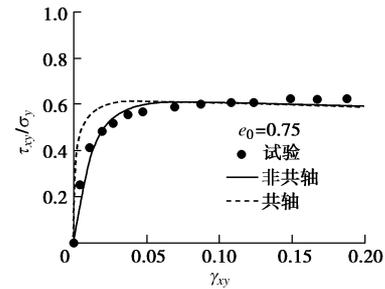
(b) 预测的主应力方向与塑性应变率方向(密砂)



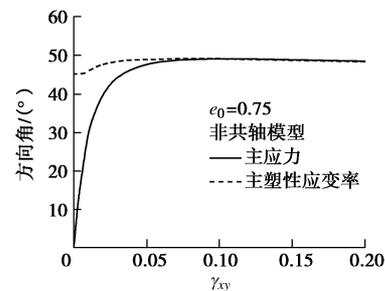
(c) 应力应变关系(中密砂)



(d) 预测的主应力方向与塑性应变率方向(中密砂)



(e) 应力应变关系(松砂)



(f) 预测的主应力方向与塑性应变率方向(松砂)

图3 模型预测结果与试验结果的比较

Fig. 3 Comparison between model predictions and experimental results

4 砂土地基承载力分析

为了分析非共轴塑性变形对于地基承载力的影响,笔者基于 MATLAB 软件开发了相关的有限元计算程序。隐式的回退 Euler 算法不适用于角点类的非共轴模型,程序中单元高斯积分点上的应力更新采用了显式向前的 Euler 积分算法。由于非共轴项的引入以及程序采用非对称的刚度矩阵进行计算,导致有限元分析不易收敛,因此计算过程将总位移荷载分为 2000 个较小的加载步施加到地基上。此外,在每一加载步中的整体平衡迭代部分,程序也采用了适当放松的收敛准则:当最大节点不平衡力与等效节点荷载的比值小于 1% 时即认为已经平衡,程序进入下一加载步的计算。

地基模型如图 4 所示,地基宽为 60 m,深为 20 m,顶部条形基础宽为 10 m,假设为完全粗糙的刚性基础。模型共划分为 1200 个单元,单元类型为四边形等

参单元。加载共分为 3 步，首先生成初始地应力场，然后在模型顶部施加一个 20 kPa 的均布压力，最后对刚性基础施加 2 m 向下的位移荷载。加载过程中固定底部边界位移及两侧边界的水平位移。地基材料为标准 Toyoura 砂，其平均粒径为 0.24 mm，颗粒相对密度为 2.64，最大和最小孔隙比分别为 $e_{\max} = 0.97$ 和 $e_{\min} = 0.63$ 。为简化计算，假设地基中的孔隙比均匀分布。将初始孔隙比分为 $e_0 = 0.8$ 与 $e_0 = 0.9$ 两种情况，对应的重度分别为 14.6, 13.8 kN/m³。与 Li 等^[25]模型相关的参数取自文献[25]， χ 取与单剪试验模拟相同值， T_0 分别取 0.0, 2.5, 5.0 三个值以研究其大小对计算结果的影响。具体材料参数见表 2。

表 2 Toyoura 砂的模型参数

Table 2 Model parameters of Toyoura sand

弹性参数	临界状态参数	剪胀参数	硬化参数	非共轴参数
$G_0 = 125$	$M_{cs} = 1.25$	$d_0 = 0.88$	$n = 1.1$	$T_0 = (0.0, 2.5, 5.0)$
$\nu = 0.05$	$e_r = 0.934$	$m = 3.5$	$h_1 = 3.15$	$\chi = 20$
	$\lambda = 0.019$		$h_2 = 3.05$	
	$\xi = 0.7$			

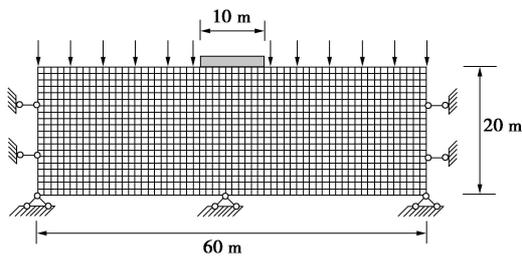


图 4 地基承载力问题计算模型

Fig. 4 Schematic diagram of bearing capacity of strip foundation

图 5, 6 分别为孔隙比 $e_0 = 0.8$ 时计算得到的位移 - 压力曲线与塑性剪应变云图; 图 7, 8 分别为孔隙比 $e_0 = 0.9$ 时计算的位移 - 压力曲线与塑性剪应变云图。由图 5, 7 可知, 在加载的前、中期阶段, 非共轴模型预测的基础压力小于共轴模型的预测结果, 并且 T_0 越大时, 这种差异越明显, 而在加载后期, 差异逐渐减小, 当竖向位移达到 2 m 时, 差异基本消失。如图 5 所示, 对于 $e_0 = 0.8$ 的情况, 共轴模型与非共轴模型预测的基础压力都出现了峰值, 分别为 3034 kPa ($T_0 = 0.0$), 2990 kPa ($T_0 = 2.5$), 2970 kPa ($T_0 = 5.0$), 峰值压力基本一致, 因此, 非共轴塑性应变基本不影响峰值基础压力的大小, 但会延缓峰值基础压力的出现, 这与前述单剪试验模拟所展示的规律是相似的。如图 5 中的 A' , B' 两点所示, 非共轴模型 ($T_0 = 5.0$) 与共轴模型预测的基础压力差在竖向位移为 0.63 m 时

最大, 相差为 620 kPa, B' 点压力值为 A' 点的 74%; 对于 $e_0 = 0.9$ 的情况, 如图 7 中的 C' , D' 两点所示, 非共轴模型 ($T_0 = 5.0$) 与共轴模型预测值在竖向位移为 0.626 m 时相差最大, 为 305 kPa, D' 点压力值为 C' 点的 76%, 这一比例与 $e_0 = 0.8$ 的情况非常接近, 此外, 两种不同密度情况下, 非共轴塑性应变的影响都存在先增大后减小的趋势, 因此, 对不同密度的砂土地基, 非共轴项的影响并不存在明显差异, 这与不同初始孔隙比的砂土单剪试验模拟结果也是一致的。由图 6 (a) 可知, 基础竖向位移达到 2 m 时, 共轴模型预测显示地基内已出现连续的滑动面, 滑动边界附近土体全部处于塑性状态, 说明地基稳定性已经丧失; 图 6 (b), (c) 与图 6 (a) 的对比表明考虑非共轴塑性应变会延缓极限状态的到来, 但图 6 (b) 中的塑性区略大于图 6 (c), 暗示出图 6 (b) 会更早出现连续滑动面, 表明 T_0 越大, 延缓趋势越明显。分析图 8 可知, 随着 T_0 的增大, 模型预测的塑性区域存在减小趋势, 但差异并不如图 6 所示明显。

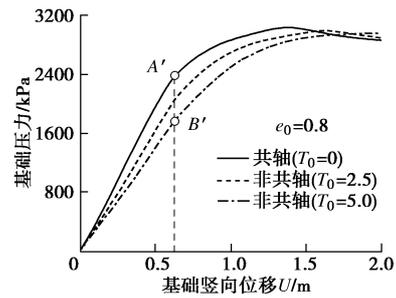
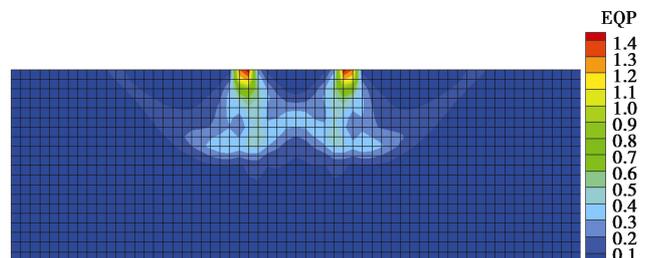
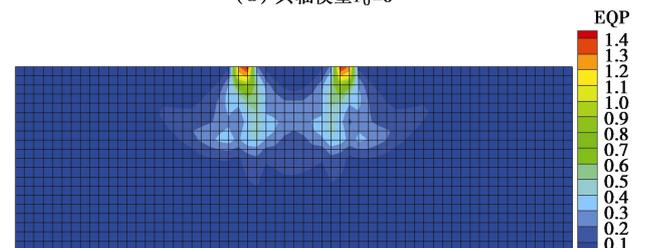


图 5 基底平均反力与竖向位移关系曲线 ($e_0=0.8$)

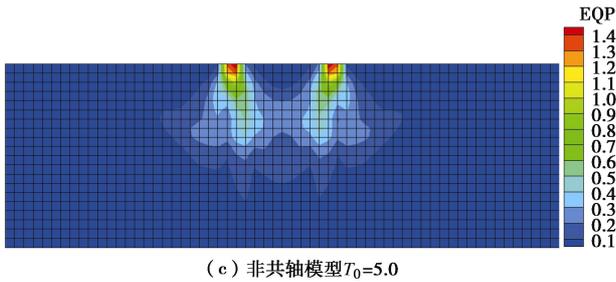
Fig. 5 Curves of average reaction force versus vertical displacement of strip foundation



(a) 共轴模型 $T_0=0$



(b) 非共轴模型 $T_0=2.5$



(c) 非共轴模型 $T_0=5.0$

图6 最终的塑性剪应变云图 ($e_0=0.8$)

Fig. 6 Contours of final plastic shear strain

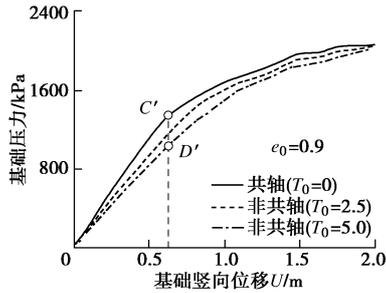
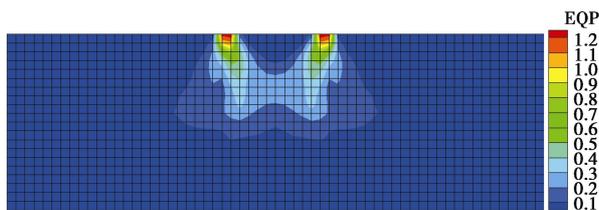
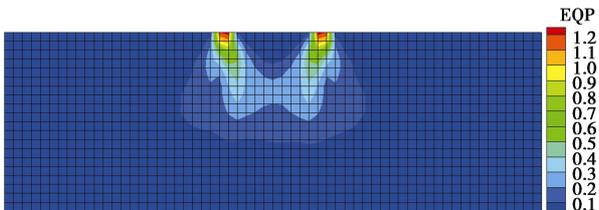


图7 基底平均反力与竖向位移关系曲线 ($e_0=0.9$)

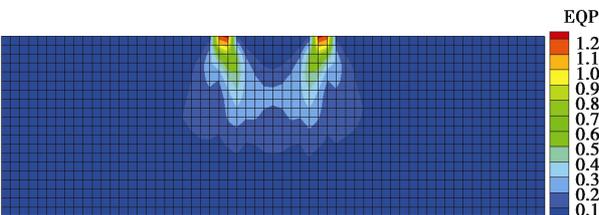
Fig. 7 Curves of average reaction force versus vertical displacement of strip foundation



(a) 共轴模型 $T_0=0$



(b) 非共轴模型 $T_0=2.5$



(c) 非共轴模型 $T_0=5.0$

图8 最终的塑性剪应变云图 ($e_0=0.9$)

Fig. 8 Contours of final plastic shear strain

整体来看,地基承载力问题的预测结果表现出单剪试验模拟结果相一致的规律,随着非共轴系数 T_0 的增大,非共轴项对预测结果的影响也更加显著。

5 结 论

(1) 剖析了传统弹塑性理论的局限性,指出了传

统位势理论所隐含共轴假设的原因。

(2) 通过在状态相关剪胀模型中引入 Hashiguchi 等发展的广义非共轴塑性流动理论,建立了砂土的非共轴模型。对砂土单剪试验的模拟表明,建立的模型能够合理预测主应力轴旋转过程中的塑性应变率与应力之间的非共轴现象;引入非共轴塑性应变项会降低模型的刚度,延缓峰值应力的出现,但不改变峰值应力比与临界应力比的大小;对不同初始孔隙比的砂土,非共轴塑性应变的影响并不存在明显的差异。

(3) 基于 MATLAB 软件开发了相应的有限元程序,通过对砂土地基承载力的分析表明,考虑非共轴塑性应变后,地基整体刚度减小,预测的位移-压力曲线更加平缓,峰值基础压力的大小基本不受影响,但非共轴项会延缓峰值基础压力的出现。此外,非共轴项的影响规律也与砂的密度关系不大。总体来看,预测结果所展示的规律与单剪试验模拟结果是相似的。

参考文献:

- [1] 郑颖人, 孔 亮. 岩土塑性力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010. (ZHENG Ying-ren, KONG Liang. Geotechnical Plastic Mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2010. (in Chinese))
- [2] ARTHUR J R F, RODRIGUEZ DEL C J I, DUNSTAN T. Principal stress rotation: a missing parameter[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1980, **106**(4): 419 - 433.
- [3] ROSCOE K H. The influence of strains in soil mechanics[J]. Géotechnique, 1970, **20**(2): 129 - 170.
- [4] ODA M, KONISHI J. Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear[J]. Soils and Foundations, 1974, **14**(4): 25 - 38.
- [5] MIURA K, MIURA S, TOKI S. Deformation behaviour of sand under principal axes rotation[J]. Soils and Foundations, 1986, **26**(1): 36 - 52.
- [6] ISHIHARA K, TOWHATA I. Sand response to cyclic rotation of principal stress direction as induced by wave loads[J]. Soils and Foundations, 1983, **23**: 11 - 16.
- [7] GUTIERREZ M, ISHIHARA K, TOWHATA I. Flow theory for sand during rotation of principal stress direction[J]. Soils and Foundations, 1991, **31**(4): 121 - 132.
- [8] GUTIERREZ M, ISHIHARA K. Non-coaxiality and energy dissipation in granular materials[J]. Soils and Foundations, 2000, **40**(2): 49 - 59.
- [9] LI X, YANG D, YU H S. Macro deformation and micro structure of 3D granular assemblies subjected to rotation of principal stress axes[J]. Granular Matter, 2016, **18**(3): 53.

- [10] RUDNICKI J W, RICE J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1975, **23**(6): 371 - 394.
- [11] YANG Y, YU H S. Numerical aspects of non-coaxial model implementations[J]. *Computers and Geotechnics*, 2010, **37**(1/2): 93 - 102.
- [12] YANG Y, YU H S. Application of a non-coaxial soil model in shallow foundations[J]. *Geomechanics and Geoengineering: An International Journal*, 2006, **1**(2): 139 - 150.
- [13] YANG Y, YU H S. A non-coaxial critical state soil model and its application to simple shear simulations[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2006, **30**(13): 1369 - 1390.
- [14] 罗强, 郑伟花. 密砂单剪试验的非共轴本构数值分析[J]. *长江科学院院报*, 2015, **32**(5): 89 - 94. (LUO Qiang, ZHENG Wei-hua. Numerical analysis of simple shear test on dense sand with non-coaxial constitutive model[J]. *Journal of Yangtze River Scientific Research Institute*, 2015, **32**(5): 89 - 94. (in Chinese))
- [15] 钱建固, 黄茂松, 杨峻. 真三维应力状态下土体应变局部化的非共轴[J]. *岩土工程学报*, 2006, **28**(4): 511 - 515. (QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song, YANG Jun. Effect of non-coaxial plasticity on onset strain localization in soils under 3D stress condition[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2006, **28**(4): 511 - 515. (in Chinese))
- [16] 李学丰, 黄茂松, 钱建固. 宏-细观结合的砂土单剪试验非共轴特性分析[J]. *岩土力学*, 2013, **34**(12): 3418 - 3424. (LI Xue-feng, HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu. Analysis of non-coaxial characters of sand for simple shear test with the method of macro-meso-incorporation[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, **34**(12): 3418 - 3424. (in Chinese))
- [17] 陈洲泉, 黄茂松. 砂土各向异性与非共轴特性的本构模拟[J]. *岩土工程学报*, 2018, **40**(2): 244 - 251. (CHEN Zhou-quan, HUANG Mao-song. Constitutive modeling of anisotropic and non-coaxial behaviors of sand[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2018, **40**(2): 244 - 251. (in Chinese))
- [18] 陈洲泉, 黄茂松. 基于状态相关本构模型的砂土非共轴特性模拟[J]. *岩土力学*, 2017, **38**(7): 1960 - 1966. (CHEN Zhou-quan, HUANG Mao-song. Simulation of non-coaxial characteristics of sandy soil based on state-dependent constitutive model[J]. *Rock and soil mechanics*, 2017, **38**(7): 1960 - 1966. (in Chinese))
- [19] DAFALIAS Y F, PAPADIMITRIOU A G, LI X S. Sand plasticity model accounting for inherent fabric anisotropy[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2004, **130**(11): 1319 - 1333.
- [20] HASHIGUCHI K. The tangential plasticity[J]. *Metals and Materials*, 1998, **4**(4): 652 - 656.
- [21] HASHIGUCHI K, TSUTSUMI S. Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect[J]. *International Journal of Plasticity*, 2001, **17**(1): 117 - 145.
- [22] HASHIGUCHI K, TSUTSUMI S. Shear band formation analysis in soils by the subloading surface model with tangential stress rate effect[J]. *International Journal of Plasticity*, 2003, **19**(10): 1651 - 1677.
- [23] GAO Z W, ZHAO J D. Strain localization and fabric evolution in sand[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, **50**(22/23): 3634 - 3648.
- [24] TIAN Y, YAO Y P. Constitutive modeling of principal stress rotation by considering inherent and induced anisotropy of soils[J]. *Acta Geotechnica*, 2018, **13**(6): 1299 - 1311.
- [25] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. *Géotechnique*, 2000, **50**(4): 449 - 460.
- [26] 姚仰平, 路德春, 周安楠. 岩土类材料的变换应力空间及其应用[J]. *岩土工程学报*, 2005, **27**(1): 24 - 29. (YAO Yang-ping, LU De-chun, ZHOU An-nan. Transformed stress space for geomaterials and its application[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2005, **27**(1): 24 - 29. (in Chinese))
- [27] 姚仰平. UH模型系列研究[J]. *岩土工程学报*, 2015, **37**(2): 193 - 217. (YAO Yang-ping. Advanced UH models for soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, **37**(2): 193 - 217. (in Chinese))
- [28] BEEN K, JEFFERIES M G. A state parameter for sands[J]. *Géotechnique*, 1985, **35**(2): 99 - 112.
- [29] LI X S, DAFALIAS Y F. Constitutive modeling of inherently anisotropic sand behavior[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2002, **128**(10): 868 - 880.
- [30] DAFALIAS Y F. An anisotropic critical state soil plasticity model[J]. *Mechanics Research Communications*, 1986, **13**(6): 341 - 347.
- [31] COLE E R L. *The Behavior of Soils in the Simple Shear Apparatus*[D]. Cambridge: Cambridge University, 1967.
- [32] 蔡正银, 李相菘. 砂土的剪胀理论及其本构模型的发展[J]. *岩土工程学报*, 2007, **29**(8): 1122 - 1128. (CAI Zheng-yin, LI Xiang-song. Development of dilatancy theory and constitutive model of sand[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, **29**(8): 1122 - 1128. (in Chinese))