

DOI: 10.11779/CJGE202002022

基于 Drucker-Prager 准则的高阶单元自适应上限有限元研究

孙 锐, 阳军生, 赵乙丁, 杨 峰*

(中南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410075)

摘 要: 引入 Drucker-Prager 屈服准则, 建立了基于高阶单元和二阶锥规划的自适应上限有限元方法, 并编制了计算程序。采用单元内部耗散能为控制指标的自适应加密策略, 以一分为二的方式对能量耗散率较大的单元进行剖分加密, 形成多次往复计算完成上限有限元的自适应加密过程。通过隧道稳定性及条形基础地基承载力算例, 分析了系列 Drucker-Prager 屈服准则对极限荷载上限解的影响, 揭示该屈服准则与 Mohr-Coulomb 屈服准则的差异所在, 以及对上限解和破坏模式的影响, 并进一步验证了基于高阶单元和二阶锥规划的自适应上限有限元法具有计算精度和求解效率高以及可搜索获取精细化破坏模式的特点。

关键词: Drucker-Prager 屈服准则; 上限有限元; 二阶锥规划; 三角形高阶单元; 自适应; 破坏模式

中图分类号: TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 4548(2020)02 - 0398 - 07

作者简介: 孙 锐(1993—), 男, 博士研究生, 主要从事隧道与地下工程方面的研究工作。E-mail: sunruilight@163.com。

Upper bound adaptive finite element method with higher-order element based on Drucker-Prager yield criterion

SUN Rui, YANG Jun-sheng, ZHAO Yi-ding, YANG Feng

(School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: An upper bound adaptive finite element method with six-node triangular high-order element, which is based on Drucker-Prager yield criterion, is established. Based on the upper bound theory, the corresponding calculation program is compiled. The element dissipative energy is used as the control index in the adaptive refine strategy. Based on the calculated results of element dissipative energy, the mesh is refined by dividing the element with high dissipative energy into two parts, and the upper bound finite element adaptive calculation is completed through repeated calculation based on the refined mesh. The influences of a series of Drucker-Prager yield criteria on the upper limit solution are analyzed depending on the calculated results of stability of tunnels and bearing capacity of strip footings. The calculated results also show that the proposed upper bound finite element method can achieve high accuracy, and the failure modes can be obtained by the mesh distribution.

Key words: Drucker-Prager yield criterion; upper bound finite element method; second-order cone programming; higher-order triangular element; self-adaptation; failure mode

0 引 言

与有限元技术结合的极限分析上限法, 具有理论严谨、适应性强等优点, 已成为分析岩土稳定性问题的有力工具之一^[1-3]。

极限分析有限元常采用三节点三角形单元离散计算域^[4-6], 若改用六节点高阶单元时, 应变率和塑性乘子在单元内部呈线性变化, 更适用于模拟剪切带等应变率梯度较高的岩土破坏问题, 目前已有不少学者研究基于六节点三角形单元的上限有限元方法^[7-8]。另一方面, 上限有限元法常建立线性规划求解岩土稳定性问题^[9-10], 近年研究表明, 基于 Drucker-Prager 等屈服

准则的二维上限有限元法均可直接转换为计算效率较高的二阶锥规划模型, 目前, 二阶锥规划方法在极限分析有限元中已得到推广应用^[11-13]。

上述研究聚焦数学规划方法以及单元类型。事实上, 单元分布对于上限有限元的计算精度也有较大影响。若将网格自适应加密技术引进上限有限元法中, 将显著提高计算精度及效率, 同时最终得到的加密单元密集形态, 也可间接反映岩土破坏模式。在这方面,

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51878669); 中南大学中央高校基本科研业务费专项资金项目 (2019zzts292)

收稿日期: 2019 - 03 - 02

*通信作者 (E-mail: yf5754@csu.edu.cn)

国内外不少学者做了相关研究^[14-18]。

岩土破坏极限状态受控于屈服准则^[19-20]。Mohr-Coulomb 屈服准则是岩土工程稳定性问题分析的常用屈服准则,但由于其由于 M-C 准则在 π 平面上的图形为不等角六边形,存在尖顶和菱角,在一些应用中,通常需要对角点处进行光滑化处理,从而带来额外的困难^[27-28]。Drucker-Prager 屈服准则作为 Mohr-Coulomb 屈服准则的修正模型,在实际操作中无需对其进行额外处理,因此常用于岩土工程稳定性分析^[21-23]。

事实上,目前关于 Drucker-Prager 屈服准则对结构极限状态的影响主要是基于有限元法。因此,本文在文献[16]的基础上,考虑土体破坏服从 Drucker-Prager 屈服准则,并引入计算效率较高的二阶锥规划方法,实现基于 Drucker-Prager 准则的高阶单元自适应上限有限元方法。通过算例分析,揭示该屈服准则与 Mohr-Coulomb 屈服准则的差异所在,以及对上限解和破坏模式的影响,以便在计算分析和工程中合理应用。

1 基于 Drucker-Prager 准则的高阶单元自适应上限有限元

1.1 极限分析上限理论

极限分析上限定理表明结构达到破坏极限状态时,结构体内部存在一个运动许可速度场,使得内能耗散不大于外力做功,即

$$D_p(\varepsilon) = \int_V d_p(\varepsilon) dV \leq W_1 + W_0 \quad (1)$$

式中 $D_p(\varepsilon)$ 为整个计算域内能耗散; $d_p(\varepsilon)$ 为内能耗散函数; ε 为塑性应变率(满足流动法则); W_1 为超载外力做功; W_0 为非超载外力做功。

使用单元离散计算域,则计算域的内能耗散应为所有单元内能耗散之和,即

$$\int_V d_p(\varepsilon) dV = \int_A \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dA \quad (2)$$

1.2 Drucker-Prager 屈服准则

假定岩土破坏遵循 Drucker-Prager 屈服准则,对于平面应变问题,其表达式为

$$\alpha I_1(\sigma_{ii}) + \sqrt{J_2(s_{ij})} = k \quad (3)$$

式中, α , k 为与黏聚力 c 与内摩擦角 φ 相关的材料常数,

$$\left. \begin{aligned} I_1(\sigma_{ii}) &= \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}, \\ J_2(s) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} s_{i,j}^2 \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由文献[21]可知, D-P 系列准则能否正确使用取决于岩土体不同的应力状态,本文在此不做细致探讨。D-P 准则的屈服面在主应力空间中是一圆锥面,针对同一材料,如表 1 所示,根据不同 α , k 值可得到一系列 D-P

屈服准则。

表 1 各准则参数换算表^[21]

编号	准则种类	α	k
DP1	MC 外角点	$\frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$	$\frac{6c \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$
	外接圆	$\frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$	$\frac{6c \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$
DP2	MC 内角点	$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{(3 + \sin^2 \varphi)}}$	$\frac{\sqrt{3} \sin \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{(3 + \sin^2 \varphi)}}$
	外接圆	$\frac{2\sqrt{3} \sin \varphi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9 - \sin^2 \varphi)}}$	$\frac{2\sqrt{3} \sin \varphi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9 - \sin^2 \varphi)}}$
DP3	M-C 内切圆	$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{(3 + \sin^2 \varphi)}}$	$\frac{\sqrt{3} \sin \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{(3 + \sin^2 \varphi)}}$
DP4	MC 等面积圆	$\frac{\sin \varphi}{3}$	$c \cos \varphi$
DP5	平面应变 MC 匹配		

由文献[11]可知,当材料满足相关流动法则,并且 $\alpha \geq 0$ 时,内能耗散函数可以转化为

$$d_p = k \lambda \quad (5)$$

式中, λ 为单元塑性乘子,且同时需要满足

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 3\alpha\lambda, \quad \lambda \geq 2\sqrt{J_2(e_{ij})}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\theta\delta_{ij}, \\ \theta &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

1.3 六节点三角形单元

如图 1 所示,采用六节点三角形单元离散计算域,且单元间不设置速度间断线,其中三角形 3 个顶点节点 1, 2, 3 对应塑性乘子 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, u_i, v_i (i=1,2,3,\dots,6)$ 为单元节点速度。

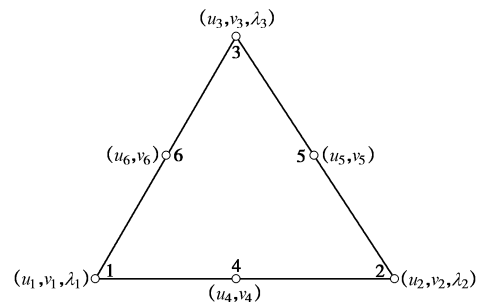


图 1 三角形六节点高阶单元

Fig. 1 Six-node strain element

显然,单元内部应变率 $\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy}$ 和塑性乘子 λ 在单元内部线性变化,若三角形单元为直边且顶点 1, 2, 3 处满足流动法则约束,即保证单元内均满足流动法则约束:

$$\lambda = \sum_{i=1}^3 L_i \lambda_i \quad (i=1,2,3) \quad (7)$$

式中, λ_i 为三角形顶点处的塑性乘子, L_i 为三角形面积坐标。

1.4 基于 D-P 准则的高阶单元上限有限元二阶锥规划模型

以下建立基于 D-P 准则的高阶单元上限有限元二阶锥规划模型。结合式(5), (7), 求解计算域耗散能:

$$P_e = \int_A k \lambda dA = \frac{k}{3} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) A \quad (8)$$

式中, P_e 定义为三角形单元的内部耗散能 k 即为表 1 中的材料参数, N_E 为计算域单元数, λ 为塑性乘子。

结合式 (6), (8), 上限有限元二阶锥规划目标函数和约束方程

$$\begin{cases} \min: \frac{k}{3} \sum_{i=1}^{N_E} (\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i} + \lambda_{3,i}) A_i - W_0, \\ 2e_{11,j} = \dot{\varepsilon}_{11,j} - \dot{\varepsilon}_{22,j}, \\ e_{12,j} = \dot{\varepsilon}_{12,j}, \\ 3\alpha\lambda_j = \dot{\varepsilon}_{11,j} - \dot{\varepsilon}_{22,j}, \\ \lambda_j \geq 2\sqrt{e_{11,j}^2 + e_{12,j}^2}, \\ C_u = b, \\ j = 1, 2, \dots, 3N_E \quad (j \text{ 为单元端点号}). \end{cases} \quad (9)$$

式中 e_{11} , e_{12} 为辅助优化变量; ε_{11} , ε_{12} , ε_{22} 为单元节点应变速率; λ 为节点塑性乘子; α 为式 (4) 确定的材料参数; $C_u = b$ 为速度约束条件; 该约束条件见文献[17]。

1.5 非结构化网格自适应加密方法

为获取高精度上限解, 需在破坏区域划分密集网格。若网格均匀加密, 会极大增大计算规模, 降低极限分析上限有限元的求解效率。这里沿用文献[16]的方法, 即同时采用高阶单元并进行网格加密, 具体流程如下: ①建立初始上限有限元分析模型, 提取初始单元内部能量耗散率。②根据计算结果, 计算结构域内所有单元内部能量耗散率总和 $\sum_{i=1}^{N_E} P_{e,i}$ 。③根据单元内部耗散率的计算结果进行从大到小对单元进行排序。定义参数 $\beta = \frac{\sum_{i=1}^n P_{e,i}}{\sum_{i=1}^{N_E} P_{e,i}}$ 为前 n 个单元的单元耗散能之和与所有单元能量耗散能之和的比值。由参数 β 控制自适应加密单元的数目及单元号。通常 $\beta=0.4$, 选定参数值之后, 通过循环叠加的方式, 确定最终需要加密的单元数量 n , 并依据排序结果确定需要加密的单元序号。④根据第 3 步的处理, 采用单元一分为二的方式对内部耗散能较大的单元进行加密。⑤返回第 2 步, 重新进行上限有限元计算, 一般情况下根据初始单元数目的不同, 加密 15~20 次即可获取较高精度的上限解。

1.6 上限有限元程序编制

上限有限元计算程序应用 MATLAB 编制, 利用商业程序 Mosek 求解二阶锥规划计算模型。程序运行环境为: 操作系统 Windows 7 64-bit; 处理器 Intel Core i5-3470M CPU@3.20 GHz; 内存 8 GB。

2 算例与验证

分别以条形基础地基承载力问题^[21]、隧道稳定性

问题^[24-26]建立上限有限元计算模型, 通过对比分析, 验证方法可靠性, 分析 D-P 屈服准则对上限解的影响。

2.1 地基承载力问题

(1) 问题描述

为了证明本文提出方法的有效性和准确性, 选取地基承载力问题作为验证。M-C 准则条件下, 刚性基础在纯黏性无重土地基 ($c \geq 0$, $\varphi > 0$, $\gamma = 0$) 上的极限荷载可由 Prandtl 公式得出

$$q_u = c \left[e^{\pi \tan \varphi} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - 1 \right] \cot \varphi \quad (10)$$

考虑对称性, 刚性基础在纯黏性无重土地基的极限承载力计算模型如图 2 所示。

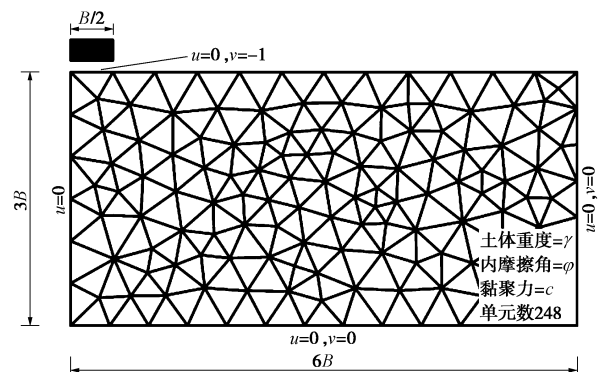


图 2 基础初始网格及边界条件

Fig. 2 Initial mesh and boundary conditions of strip footing

土体重度为 γ , 内摩擦角为 φ , 土体黏聚力为 c , 基础宽度为 B 。土体右边界及下边界为速度为 0, 即 $u=0$, $v=0$; 土体左边界速度边界条件为 $u=0$; 基础与地基之间的速度边界条件为 $u=0$, $v=-1$ 。

(2) 分析与讨论

如表 2 所示, 分别计算不同内摩擦角 φ 下的刚性基础地基承载力系数 N_c , 其中 $c=10$, 并与文献[21]中地基极限承载力有限元法计算结果进行对比。

由表 2 可以看出, 本文方法计算结果较小于文献[21]中地基承载力计算结果, 如内摩擦角为 0° , DP1 屈服准则下, 本文求得上限解较文献[21]小 0.9%; 内摩擦角为 15° , DP2 屈服准则下, 本文求得上限解较文献[21]小 4.2%; 内摩擦角为 20° , DP3 屈服准则下, 本文求得上限解较文献[21]小 6.1%。结果表明, 不同 Drucker-Prager 屈服准则条件下, 本文提出的方法均能够获取较优上限解。

结合表 2 中结果可以发现, 内摩擦角 φ 对 DP 系列屈服准则的计算精度具有较大的影响。DP1 屈服准则计算误差随着内摩擦角的增大而增大, 且极大高估土体的稳定性。DP2 屈服准则与 MC 屈服准则吻合较好, 但其在内摩擦角 $\varphi \leq 25^\circ$ 时, 略高估了土体的强

表 2 N_c 计算结果与文献结果对比

Table 2 Comparison between present results and those available in literatures

内摩擦角	0°		10°		15°		20°		25°		30°	
	本文方法	文献[21]	本文方法	文献[21]	本文方法	文献[21]	本文方法	文献[21]	本文方法	文献[21]	本文方法	文献[21]
DP1	59.69	60.23	116.89	121.50	181.65	192.81	316.96	362.25	664.67	891.16	2350.02	2373.60
DP2	59.69	60.23	96.26	98.59	124.48	129.91	163.26	175.00	216.34	243.13	291.25	351.88
DP3	51.53	52.19	83.08	84.98	107.88	111.90	142.48	151.75	190.84	212.08	259.96	310.00
DP4	54.10	54.81	90.70	92.94	122.35	127.51	171.65	184.90	252.06	289.28	394.98	508.83
DP5	51.53	52.19	83.72	86.20	110.22	115.51	149.25	159.75	208.38	201.19	303.23	370.48
Prandtl	51.42		83.45		109.77		148.35		207.21		301.4	

注: DP1 代表 M-C 外角点外接圆, DP2 代表 M-C 内角点外接圆, DP3 代表 M-C 内切圆, DP4 代表 M-C 等面积圆, DP5 代表 M-C 匹配 DP 圆。

度, 但 $\varphi > 25^\circ$ 则低估了土体强度。DP3 屈服准则的计算结果始终略小于 MC 屈服准则 (DP5), 在内摩擦角 $\varphi \leq 25^\circ$ 时, 计算误差较小, 但在 $\varphi > 25^\circ$ 时, 其计算误差要大于 DP2 屈服准则。DP4 屈服准则同样高估土体的强度, 但是与实际强度相差不大。

为体现本文方法的计算精度, 对比不同内摩擦角下, 本文方法与文献[21]所求的平面应变问题 M-C 匹配 D-P 准则 (DP5) 条件下的地基承载力, 如图 3 所示。由图 3 可知, 内摩擦角 $\varphi = 0^\circ$ 时, 两种方法的计算精度均较高。随着内摩擦角增大, 文献[21]的计算误差不断增大, 内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$ 时, 文献[21]中计算误差为 23.4%, 本文方法仍保持较高计算精度。

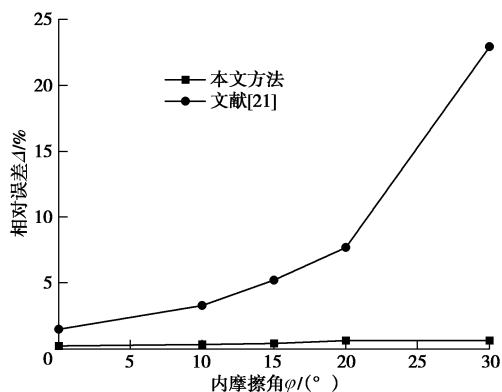


图 3 地基承载力相对误差

Fig. 3 Relative errors of bearing capacity

(3) 加密网格及破坏模式

本文采用基于单元耗散能的加密策略, 在单元耗散能较大处加密网格, 因此, 加密后的网格分布能够间接反映出结构的破坏模式。

为了简化分析, 图 4 中左侧展示土体破坏服从 DP1、DP2、DP5 时的自适应加密 15 次网格图, 右侧则为相应的速度矢量图。其中, 图 4 (a) 为采用 DP1 屈服准则, $c = 10, \varphi = 20^\circ$ 时的加密网格及速度矢量图, 单元数为 12622; 图 4 (b) 为采用 DP2 屈服准则, $c = 10, \varphi = 10^\circ$ 时的加密网格及速度矢量图, 单元数为 8693; 图 4 (c) 为采用 DP5 屈服准则, $c = 10, \varphi = 20^\circ$ 时的加密网格及速度矢量图, 单元数为 8309。

由图 4 (c) 即 DP5 条件下, 自适应加密 15 网格

图可以发现, 加密网格形成较清晰带状区域, 并较清晰地反映出基础下方的主动区、相邻的被动区以及过渡区与经典的 Prandtl 模型相一致。与图 2 地基初始网格图对比可以发现, 对于未破坏区, 单元并未加密, 这也间接体现出本文所提方法的适用性及有效性。DP1 与 DP2 条件下, 破坏形态与 DP5 条件下相类似, 区别仅在于破坏区域的大小不一致。

2.2 隧道稳定性问题

(1) 问题描述

为了进一步证明本文提出方法的有效性和准确性, 选取隧道稳定性问题进行验证。

(2) 分析与讨论

分别计算不同内摩擦角 φ 时, 自重作用下圆形隧道临界破坏系数 $\gamma_{\max} D/c$, 并与文献[24~26]中上限有限元计算结果进行对比, 结果如表 3 所示。

表 3 自重作用下圆形隧道临界破坏系数计算结果(DP5)

Table 3 Calculated results of critical failure coefficient of circular tunnel under gravity (DP5)

C/D	$\varphi / (^\circ)$	Yang 等 ^[26]	Sahoo 等 ^[25]	Yamamoto 等 ^[24]	本文方法
1	5	2.34	—	2.33	2.29
	10	2.69	2.63	2.61	2.62
	20	3.63	3.67	—	3.52
2	5	1.8	—	1.76	1.77
	10	2.14	2.2	2.13	2.11
	20	3.13	3.28	—	3.11

由表 3 可以看出, 本文方法略小于文献[24~26]中的上限解。如 $C/D = 1$, 内摩擦角为 20° 时, 本文求得上限解较文献[26]小 3.1%, 较文献小 4.3%^[26]; 如 $C/D = 2$, 内摩擦角为 10° 时, 本文求得上限解较文献[26]小 1.5%, 较文献[25]小 4.3%。结果表明, 本文提出的方法能够获取较优上限解。

表 4 中列举了系列 DP 准则下隧道临界破坏系数计算结果。可以发现, 内摩擦角 $\varphi = 0^\circ$ 时, DP1 与 DP2 的计算结果是一致的; 内摩擦角 $\varphi = 5^\circ, 10^\circ$ 时, 计算结果 $DP1 > DP2 > DP4 > DP5 > DP3$; 内摩擦角 $\varphi = 20^\circ$ 时, 计算结果 $DP1 > DP4 > DP2 > DP5 > DP3$, 与文献[21]中所总结的规律基本一致, 这也从另一方面证明了本文所提方法的正确性及有效性。

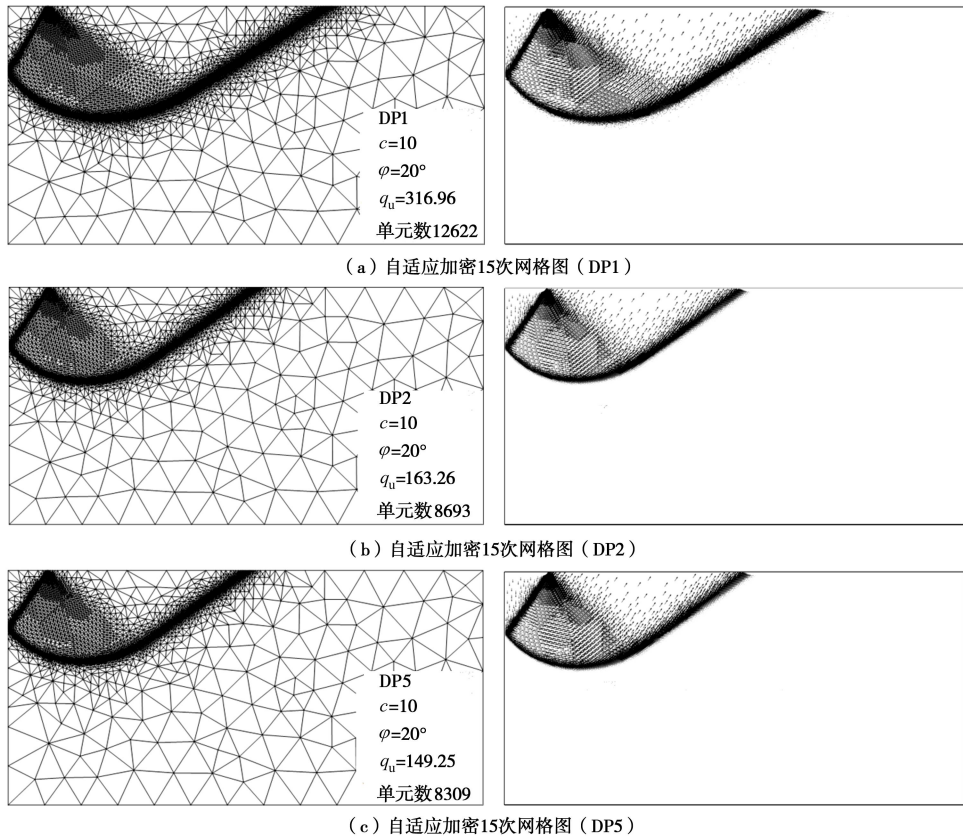


图4 地基承载力自适应上限有限元加密后网格

Fig. 4 Adaptive refined meshes of bearing capacity using finite element upper bound solution

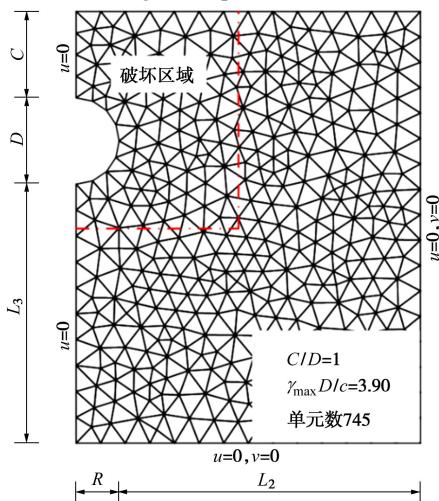


图5 隧道初始网格及边界条件

Fig. 5 Initial mesh and boundary conditions of tunnel

结合表4中结果可以发现, DP1屈服准则的计算结果始终大于DP5屈服准则(匹配MC屈服准则),且计算误差随着内摩擦角的增大而增大,这说明采用DP1屈服准则会极大高估土体的稳定性。DP4屈服准则同样高估土体的强度,但是与实际强度相差不大。DP3屈服准则为MC的内切圆,实质上相当于降低了土体的强度,结合表4中计算结果,采用DP3屈服准则的临界破坏强度略小于DP5屈服强度,这也是符合极限分析的理论推导。与DP1, DP3, DP4屈服准则不同,在内摩擦角 $\phi \leq 25^\circ$ 时, DP2屈服准则计算结果略

大于DP5, 在内摩擦角 $\phi > 25^\circ$ 时, 计算结果略小于DP5屈服准则, 但是计算误差要小于DP3屈服准则。

表4 系列DP准则下隧道临界破坏系数计算结果

Table 4 Calculated results of critical failure coefficient of circular tunnel under gravity based on Drucker-Prager yield criteria

C/D	$\phi / (^\circ)$	DP1	DP2	DP3	DP4	DP5
1	0	2.33	2.33	2.02	2.12	2.02
	5	2.80	2.62	2.29	2.42	2.29
	10	3.45	2.94	2.60	2.80	2.62
	20	6.00	3.76	3.40	3.90	3.52
	25	8.76	4.28	3.92	4.75	4.17
	30	13.78	4.85	4.51	5.89	4.98
2	35	25.18	5.48	5.17	7.41	5.98
	0	1.74	1.74	1.51	1.58	1.51
	5	2.18	2.03	1.77	1.88	1.77
	10	2.83	2.39	2.09	2.26	2.11
	20	5.63	3.35	3.00	3.49	3.11
	25	8.65	3.97	3.60	4.46	3.86
	30	13.76	4.67	4.31	5.75	4.80
	35	25.19	5.40	5.07	7.38	5.94

(3) 加密网格及破坏模式

以土体破坏分别服从DP3、DP4、DP5屈服准则时隧道稳定性问题自适应网格加密图为例, 进一步展示本文所提方法能够间接获取破坏模式的优点。

图6(a)为基于DP3屈服准则, 单元自适应加密15次的网格图, 计算域单元数为7409; 图6(b)为基于DP4屈服准则, 计算域单元数为7545; 图6(c)为基于DP5屈服准则, 计算域单元数为7850。

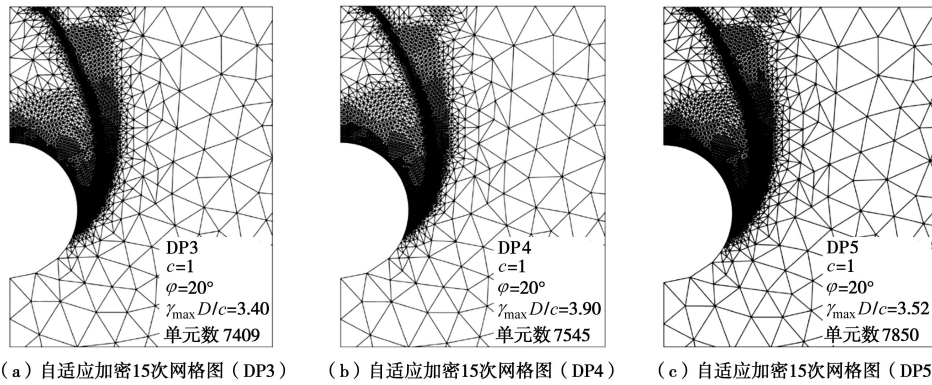


图6 隧道稳定性自适应上限有限元加密后网格 ($C/D=1$, $\varphi=20^\circ$)

Fig. 6 Adaptive refined meshes of bearing capacity using finite element upper bound solution

3 结 论

本文建立基于 Drucker-Prager 准则的高阶单元自适应上限有限元计算模型, 得到以下 2 点结论。

(1) 基于 Drucker-Prager 准则的高阶单元自适应上限有限元方法具有较高计算效率及精度。

(2) 采用 DP1 屈服准则会极大高估土体的安全系数, 且内摩擦角越大, 误差越大; 从安全角度来说, 内摩擦角 $\varphi \leq 25^\circ$ 时, DP3 与 MC 屈服准则吻合较好; 内摩擦角 $\varphi > 25^\circ$ 时, DP2 计算结果较精确, 且安全系数偏低; DP4 计算精度要高于 DP1 屈服准则, 但安全系数始终偏高。算例结果表明, 只要选取合适的 D-P 准则, 其计算精度是很高的, 完全可以在实际工程中获得广泛的应用。

参考文献:

- [1] 孙 聪, 李春光, 郑 宏, 等. 基于单元速度泰勒展开的上限原理有限元法[J]. 岩土力学, 2016, **37**(4): 1153 - 1160. (SUN Cong, LI Chun-guang, ZHENG Hong, et al. Upper bound limit analysis based on Taylor expansion form of element velocity[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, **37**(4): 1153 - 1160. (in Chinese))
- [2] 赵明华, 胡 啸, 张 锐. 临坡地基承载力极限分析上限有限元数值模拟[J]. 岩土力学, 2016, **37**(4): 1137 - 1143. (ZHAO Ming-hua, HU Xiao, ZHANG Rui. Numerical simulation of the bearing capacity of a foundation near slope using the upper bound finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, **37**(4): 1137 - 1143. (in Chinese))
- [3] ZHANG J, YANG F, YANG J, et al. Upper-bound stability analysis of dual unlined elliptical tunnels in cohesive- frictional soils[J]. Computers and Geotechnics, 2016, **80**: 283 - 289.
- [4] BOTTERO A, NEGRE R, PASTOR J, et al. Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 1980, **22**(1): 131 - 149.
- [5] SLOAN S W, KLEEMAN P W. Upper bound limit analysis with discontinuous velocity fields[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 1995, **127**(1): 293 - 314.
- [6] 杨小礼, 李 亮, 刘宝琛. 大规模优化及其在上限定理有限元中的应用[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(5): 602 - 605. (YANG Xiao-li, LI Liang, LIU Bao-chen. Large-scale optimization and its application to upper bound theorem using kinematical element method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(5): 602 - 605. (in Chinese))
- [7] 杨 峰, 阳军生, 李昌友, 等. 基于六节点三角形单元和线性规划模型的上限有限元研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, **31**(12): 2556 - 2563. (YANG Feng, YANG Jun-sheng, LI Chang-you, et al. Investigation of finite element upper bound solution based on six nodal triangular elements and linear programming model[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, **31**(12): 2556 - 2563. (in Chinese))
- [8] YU H S, SLOAN S W, KLEEMAN P W. A quadratic element for upper bound limit analysis[J]. Engineering Computations, 1994, **11**(3): 195 - 212.
- [9] SLOAN S W. A steepest edge active set algorithm for solving sparse linear programming problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1988, **26**: 2671 - 2685.
- [10] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite element and linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1989, **13**: 263 - 282.
- [11] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Upper bound limit analysis using simplex strain elements and secondorder-cone programming[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2007, **31**(6): 835 - 865.
- [12] NGUYEN-THOI T, PHUNG-VAN P, NGUYEN-THOI M H, et al. An upper-bound limit analysis of Mindlin plates using

- CS-DSG3 method and second-order cone programming[J]. *Journal of Computational & Applied Mathematics*, 2015, **281**(C): 32 - 48.
- [13] 杨昕光, 周密, 张伟, 等. 基于二阶锥规划的边坡稳定上有限元分析[J]. *长江科学院院报*, 2016, **33**(12): 61 - 67. (YANG Xin-guang, ZHOU Mi, ZHANG Wei, et al. Upper bound finite element limit analysis of slope stability using second-order cone programming[J]. *Journal of Yangtze River Scientific Research Institute*, 2016, **33**(12): 61 - 67. (in Chinese))
- [14] SUÁREZ C, HÉCTOR. Computation of Upper and Lower Bounds in Limit Analysis Using Second-order Cone Programming and Mesh Adaptivity[R]. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2002.
- [15] 赵明华, 张锐. 有限元上限分析网格自适应方法及其工程应用[J]. *岩土工程学报*, 2016, **38**(3): 537 - 545. (ZHAO Ming-hua, ZHANG Rui. Adaptive mesh refinement of upper bound finite element method and its applications in geotechnical engineering[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, **38**(3): 537 - 545. (in Chinese))
- [16] 阳军生, 张箭, 杨峰. 浅埋隧道掌子面稳定性二维自适应上有限元分析[J]. *岩土力学*, 2015, **36**(1): 257 - 264. (YANG Jun-sheng, ZHANG Jian, YANG Feng. Stability analysis of shallow tunnel face using two-dimensional finite element upper bound solution with mesh adaptation[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, **36**(1): 257 - 264. (in Chinese))
- [17] 杨峰, 阳军生. 用于上有限元的非结构网格重划加密方法研究[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2014(10): 3571 - 3577. (YANG Feng, YANG Jun-sheng. Investigation of unstructured mesh regeneration and Refinement method for finite element upper bound solution[J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2014(10): 3571 - 3577. (in Chinese))
- [18] MUÑOZ J J, BONET J, HUERTA A, et al. Upper and lower bounds in limit analysis: Adaptive meshing strategies and discontinuous loading[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, **77**(4): 471 - 501.
- [19] 杨雪强, 凌平平, 向胜华. 基于系列 Drucker-Prager 破坏准则评述土坡的稳定性[J]. *岩土力学*, 2009, **30**(4): 865 - 870. (YANG Xue-qiang, LIN Ping-ping, XIANG Sheng-hua. Comments on slope stability based on a series of Drucker-Prager failure criteria[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, **30**(4): 865 - 870. (in Chinese))
- [20] 王渭明, 赵增辉, 王磊. 不同强度准则下软岩巷道底板破坏安全性比较分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2012, **31**(增刊 2): 3920 - 3927. (WANG Wei-ming, ZHAO Zeng-hui, WANG Lei. Safety analysis for soft rock tunnel floor destruction based on different yield criterions[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2012, **31**(S2): 3920 - 3927. (in Chinese))
- [21] 邓楚键, 何国杰, 郑颖人. 基于 M-C 准则的 D-P 系列准则在岩土工程中的应用研究[J]. *岩土工程学报*, 2006, **28**(6): 735 - 739. (DENG Chu-jian, HE Guo-jie, ZHENG Ying-ren. Studies on Drucker-Prager yield criterions based on M-C yield criterion and application in geotechnical engineering[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2012, **28**(6): 735 - 739. (in Chinese))
- [22] 王先军, 陈明祥, 常晓林, 等. Drucker-Prager 系列屈服准则在稳定分析中的应用研究[J]. *岩土力学*, 2009, **30**(12): 3733 - 3738. (WANG Xian-jun, CHEN Ming-xiang, CHANG Xiao-lin, et al. Studies of application of Drucker-Prager yield criteria to stability analysis[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, **30**(12): 3734 - 3738. (in Chinese))
- [23] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Upper bound limit analysis using discontinuous quadratic displacement fields[J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2008, **24**: 911 - 927.
- [24] YAMAMOTO K, LYAMIN A V, WILSON D W, et al.. Stability of a circular tunnel incohesive-frictional soil subjected to surcharge loading[J]. *Computers and Geotechnics*, 2011, **38**: 504 - 514.
- [25] SAHOO J P, KUMAR J. Stability of long unsupported twin circular tunnels in soils[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2013, **38**: 326 - 335.
- [26] YANG F, ZHANG J, YANG J, et al. Stability analysis of unlined elliptical tunnel using finite element upper-bound method with rigid translatory moving elements[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2015, **50**: 13 - 22.
- [27] 赵明华, 张锐, 雷勇, 等. 基于可行弧内点算法的上有限元法优化求解[J]. *岩土工程学报*, 2014, **36**(4): 604 - 611. (ZHAO Ming-hua, ZHANG Rui, LEI Yong, et al. Optimization of upper bound finite element method based on feasible arc interior point algorithm[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, **36**(4): 604 - 611. (in Chinese))
- [28] 赵明华, 张锐, 刘猛. 下限分析有限单元法的非线性规划求解[J]. *岩土力学*, 2015, **36**(12): 3589 - 3597. (ZHAO Ming-hua, ZHANG Rui, LIU Meng. Nonlinear programming of lower bound finite element method[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, **36**(12): 3589 - 3597. (in Chinese))