第41卷 第11期　　岩　土　工　程　学　报　　Vol.41 No.11
2019年 11月　　Chinese Journal of Geotechnical Engineering　　Nov. 2019

DOI：10.11779/CJGE201911016

考虑损伤渗流边坡稳定性数值离心加载法分析

许梦飞[1]，姜谙男[*1]，段龙梅[2]，焦明伟[2]，胡雪峰[2]

(1. 大连海事大学道路与桥梁工程研究所，辽宁 大连 116026；2. 吉林省交通规划设计院，吉林 长春 130000)

摘　要：为分析损伤–渗流耦合作用下边坡工程的稳定性，建立了基于Mohr-Coulomb准则的岩石弹塑性损伤–渗流耦合模型。从主应力空间的角度出发推导了损伤作用下Mohr-Coulomb准则的应力回映算法，解决了数值实施过程中应力更新的“奇异点问题”；基于分布迭代法编制了岩石弹塑性损伤–渗流耦合有限元计算程序。将离心加载法与所编程序结合，求解了多场耦合作用下的边坡安全系数，再现了边坡渐进破坏过程中损伤场演化规律，证明了所建数值模型能够较好的描述应力、渗流和损伤作用下，岩石材料的宏观破坏现象。最后对实际边坡工程进行了数值模拟，计算结果为工程安全性评价提供了参考。

关键词：弹塑性损伤；耦合模型；有限元计算；离心加载法；边坡稳定

中图分类号：TU451　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000–4548(2019)11–2103–09

作者简介：许梦飞(1989—)，男，博士研究生，从事岩土多场耦合机理及数值模拟方面的研究工作。E-mail: 824599159@qq.com。

Centrifugal loading finite element method for slope stability under damage-seepage coupling effect

XU Meng-fei[1], JIANG An-nan[1], DUAN Long-mei[2], JIAO Ming-wei[2], HU Xue-feng[2]

(1. Institute of Road and Bridge Engineering, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China; 2. Jinlin Traffic Planning and Design Institute, Changchun 130000, China)

Abstract: An elasto-plastic damage seepage coupling model for rock based on the Mohr-Coulomb criterion is established to analyze slope stability. The stress return method in the principal stress space is given for the Mohr-Coulomb criterion under damage effect to solve the singular point problem during stress updating. The elastoplastic-damage-seepage finite element program for rock is compiled based on the stepwise iterative method. The centrifugal loading method is combined with the program which is used to calculate the factor of safety of slopes under coupling effect, and the damage evolution rules during failure process are represented. Finally, the numerical simulation is done for an actual slope, and the results may provide reference for the evaluation of engineering safety.

Key words: elasto-plastic damage; coupling model; FEM calculation; centrifugal loading; slope stability

0 引　　言

边坡稳定性分析是岩土工程中一个重要难题[1]。随着计算机技术和有限元理论的发展，有限元强度折减法逐渐被广泛用于边坡稳定性分析[2]。该方法能够考虑土体的应力–应变关系，计算时不需事先设定潜在活动面的形状和位置，对于复杂地质体材料具有较好的适用性，可以再现边坡的渐进破坏过程[3]。强度折减法也有许多不足之处：由于内摩擦角 c 和黏聚力 φ 各自产生的物理机制不同，采取单一折减系数进行折减时计算结果与实际会有较大出入；而双折减法的折减路径选择等问题都尚未存在定论[4]，其在使用中缺乏合理的理论依据。

离心加载法的计算原理与强度折减法相反，计算过程中保持 c，φ 不变，逐步增大重力加速度 G 直到边坡发生失稳破坏，将此时的重力加速度值与实际重力加速度值之比定义为安全系数。唐春安等[5]将离心加载法应用于RFPA系统，提出了一种岩土工程稳定性分析的新方法；曹建建等[6]将该方法应用于边坡工程中，通过与传统方法的研究成果进行比对，证明了离心加载有限元法的合理性；肖武等[7]利用离心加载法对降雨作用下边坡的安全系数进行求解，计算结果

基金项目：国家自然科学基金项目（51678101）；中央高校基本科研业务费专项资金项目(3132014326)；吉林省交通运输项目(2017ZDGC-4)

收稿日期：2018–11–16

*通讯作者：（E-mail：jiangannan@163.com）

与刚体极限平衡法基本一致。离心加载法有效地回避了强度折减法中存在的问题，能够更加方便、快捷地进行岩土工程稳定性分析。

岩土工程施工过程中引起的应力重分布会使岩体材料产生损伤，造成岩体的力学特性发生明显弱化，同时渗透率也发生变化，使得应力–渗流耦合现象愈发明显[8]。同时，地下水充斥于边坡裂隙当中，大大降低了其抗剪强度，导致岩体的整体稳定性降低。因此，在进行边坡稳定性分析时，应充分考虑岩体应力场、渗流场和损伤场的耦合作用，以免造成工程事故。

本文首先建立了基于 Mohr–Coulomb 准则(M–C)的岩石弹塑性损伤模型，并给出了其在主应力空间中的应力回映算法表达式；利用变分原理编制了稳态渗流的有限元求解程序；引入有效应力原理和渗透系数演化方程建立岩石弹塑性损伤–渗流耦合模型，通过分布迭代法实现其数值求解过程；将离心加载法与耦合模型有限元计算程序相结合，对多场耦合作用下边坡稳定性进行分析，为复杂条件下边坡工程的安全设计提供了一种有效方法。

1　岩石弹塑性损伤-渗流耦合模型

1.1　岩石损伤软化模型

从连续损伤力学角度来看[9]，损伤作用一方面体现在损伤变量对弹性模量和材料强度的弱化，另一方面损伤变量通常为塑性内变量及应力状态的函数，随着应力（应变）场的变化而变化。

由图 1 可知，当岩土材料的应变达到损伤阈值 $e_{\mathrm{D}}^{\mathrm{p}}$ 后，其弹性模量 E 随着损伤变量 D 的增长而减小，变化公式为

$$E = E_0(1-D) \quad 。 \tag{1}$$

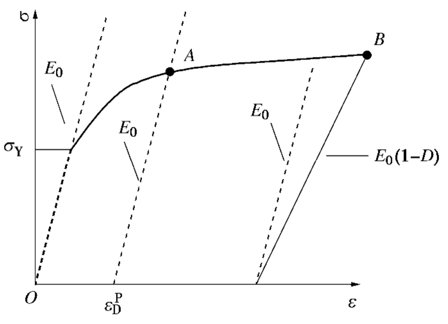


图 1　损伤对弹性模量的影响

Fig. 1 Effect of damage on elasticity modulus

引入 Mohr–Coulomb 屈服准则对岩石塑性特征进行描述。考虑孔隙水压和损伤作用下的屈服准则表达式为

$$F = \frac{I_1}{3}\sin j + \sqrt{J_2(s)}\left[\sin(q+\pi/3) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(q+\pi/3)\sin j\right] - (1-D)c\cos j \quad 。 \tag{2}$$

式中　I_1 为应力张量第一不变量；J_2 为应力偏量第二不变量；θ 为罗德角；φ 为内摩擦角；c 为黏聚力。

与黏聚力 c 相比，损伤对内摩擦角的影响较小，可以忽略。黏聚力随着损伤的累积逐渐减小，其幂函数表达形式如下：

$$c(\bar{e}^{\mathrm{p}}) = c(\bar{e}^{\mathrm{p}})' - (c(\bar{e}^{\mathrm{p}})' - c_{\mathrm{r}})D^{\zeta} \quad 。 \tag{3}$$

式中　$c(\bar{e}^{\mathrm{p}})'$ 为黏聚力；c_{r} 为岩石明显损伤时的黏聚力；z 为材料参数，$0 \leqslant z \leqslant 1$；$c(\bar{e}^{\mathrm{p}})'$ 为采用分段线性软化函数逼近非线性软化函数：

$$c(\bar{e}^{\mathrm{p}})' = c_0 + H\bar{e}^{\mathrm{p}} \quad , \tag{4}$$

式中　c_0 为初始黏聚力；H 为软化模量，表达式为 $H(\bar{e}^{\mathrm{p}}) = \partial c / \partial \bar{e}^{\mathrm{p}}$，$\bar{e}^{\mathrm{p}}$ 为累积塑性应变，其增量表达式为 $\overline{\mathrm{d}e^{\mathrm{p}}} = \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}e_{ij}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}e_{ij}^{\mathrm{p}}}$。黏聚力的软化曲线如图 2 所示。

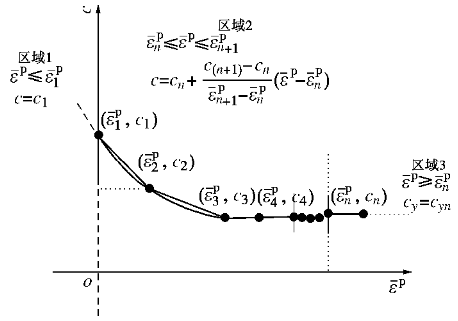


图 2　应变软化曲线

Fig. 2 Strain-softening curves

由于指数函数形式比较符合岩土材料的损伤规律[10]，且考虑到损伤的阈值问题[11]，本文采用等效塑性应变 $\bar{e}^{\mathrm{p}}$ 对岩石损伤变量的演化过程进行表征：

$$D = 1 - \exp[-k(\bar{e}^{\mathrm{p}} - \bar{e}_0^{\mathrm{p}})] \quad 。 \tag{5}$$

式中，$\bar{e}_0^{\mathrm{p}} = 0$ 为等效塑性应变阈值，即产生等效塑性应变时有损伤演化，等效塑性应变的表达式为

$$\bar{e}^{\mathrm{p}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(e_{\mathrm{p1}} - e_{\mathrm{p2}})^2 + (e_{\mathrm{p2}} - e_{\mathrm{p3}})^2 + (e_{\mathrm{p1}} - e_{\mathrm{p3}})^2} \ , \tag{6}$$

式中，e_{p1}，e_{p2}，e_{p3} 为 3 个主塑性应变，k 为常数，可以通过室内试验或反分析求得[12]，损伤变量演化规律如图 3 所示。

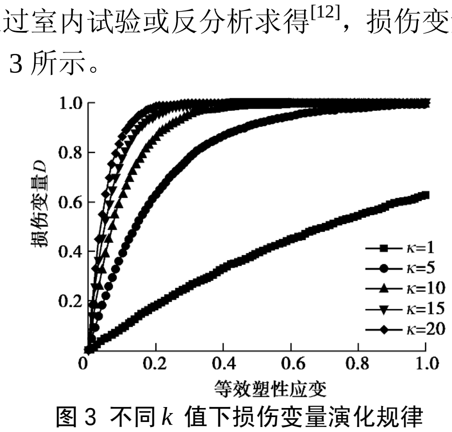


图 3　不同 k 值下损伤变量演化规律

Fig. 3 Damage evolution laws under different k

由图 3 可知，在产生塑性变形前，岩石内部没有发生损伤；损伤变量变化速率随累积塑性应变的发展

逐渐减缓；不同 k 值下损伤变量演化规律不同。

1.2　岩石渗透性演化方程

岩石的内部缺陷为地下水的贮存和流动提供了条件。将岩石视为各向均质的多孔介质，由 Darcy 定律可得稳定渗流控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial p}{\partial z}\right)+g\frac{\partial(k_z)}{\partial z}=S_{\mathrm{s}}\frac{\partial p}{\partial t}\text{。} \tag{7}$$

式中　p 为孔隙水压力；k_x，k_y，k_z 分别为 x，y，z 轴方向的渗透系数；S_{s} 为单位贮存量；g 为水的重度。

将岩石视为连续多孔介质，其内部应力应变场的改变会导致岩石渗透性的改变，文献[13]推导了渗透系数和体积应变之间的关系：

$$k=k_0\left[\left(\frac{1}{n_0}\right)(1+e_{\mathrm{v}})^3-\left(\frac{1-n_0}{n_0}\right)(1+e_{\mathrm{v}})^{-1/3}\right]^3\text{，} \tag{8}$$

式中，k_0 为初始渗透率，n_0 为初始孔隙度，e_{v} 为体积应变。

2　有限元方程及耦合程序编写

2.1　M-C 准则主应力空间的应力回映算法

本文从主应力空间出发，对返回应力路径问题进行分区处理，避免了 M–C 准则积分过程中的“奇异点”问题[14-15]。

（1）多屈服面流动法则

主应力空间中，M–C 准则的屈服函数表达式为

$$\left.\begin{aligned}
f_1&=s_1-s_3+(s_1+s_3)\sin j-2c(1-D)\cos j\text{，}\\
f_2&=s_2-s_3+(s_2+s_3)\sin j-2c(1-D)\cos j\text{，}\\
f_3&=s_2-s_1+(s_2+s_1)\sin j-2c(1-D)\cos j\text{，}\\
f_4&=s_3-s_1+(s_3+s_1)\sin j-2c(1-D)\cos j\text{，}\\
f_5&=s_3-s_2+(s_3+s_2)\sin j-2c(1-D)\cos j\text{，}\\
f_6&=s_1-s_2+(s_1+s_2)\sin j-2c(1-D)\cos j\text{。}
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中　s_1 为最大主应力，s_3 为最小主应力。势函数 Ψ_i 与屈服函数形式相同，用膨胀角 y 代替内摩擦角 j 即可。

假设主应力位于 $s_1\geqslant s_2\geqslant s_3$ 区域，在不失一般性的情况下，只对 π 平面上六分之一区域进行讨论，有 4 种可能的塑性流动情况，如图 4 所示。

a）当应力点在屈服函数面上时，只有一个塑性因子不为零：

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\dot{\lambda}\boldsymbol{N}^a\text{，} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{N}^a=\boldsymbol{N}^1=\frac{\partial Y_1}{\partial s}=(1+\sin y)e_1\otimes e_1-(1-\sin y)e_3\otimes e_3\text{。} \tag{11}$$

式中　$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 为塑性应变；$\dot{\lambda}$ 为塑性因子；N^a 为与塑性势函数 Ψ_1 正交的流动向量。

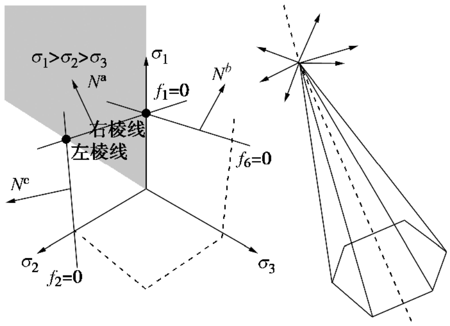


图 4　多屈服面流动法则

Fig. 4 Flow rule of multisurface plastic potential function

b）当应力点位于右棱线上，有两个塑性因子不为零：

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\dot{\lambda}^a\boldsymbol{N}^a+\dot{\lambda}^b\boldsymbol{N}^b\text{，} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{N}^b=\boldsymbol{N}^6=(1+\sin y)e_1\otimes e_1-(1-\sin y)e_2\otimes e_2\text{，} \tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{N}^6$ 为与塑性势函数 Ψ_6 正交的流动向量。

c）当应力点位于左棱线上，塑性应变表达式与式（10）相同，此时，

$$\boldsymbol{N}^b=\boldsymbol{N}^2=(1+\sin y)e_2\otimes e_2-(1-\sin y)e_3\otimes e_3\text{，} \tag{14}$$

式中，$\boldsymbol{N}^2$ 为与 Ψ_2 正交的流动向量。

d）当应力点位于 M–C 准则的尖点处，6 个塑性因子均不为零：

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\sum_{i=6}^{6}\dot{\lambda}^i\boldsymbol{N}^i\text{。} \tag{15}$$

累积塑性应变 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 作为表征材料硬化(软化)的内变量，其求解公式同上述流动法则具有相同的形式：

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=2\cos j\sum_{i=1}^{6}\dot{\lambda}^i\text{。} \tag{16}$$

当应力点在屈服平面，棱线和尖点处时，其表达式分别为

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\begin{cases}2\cos j\,\dot{\lambda}\\ 2\cos j\,(\dot{\lambda}^a+\dot{\lambda}^b)\\ 2\cos j\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\dot{\lambda}^i\end{cases}\text{。} \tag{17}$$

（2）应力回映算法

考虑损伤的 M–C 准则主应力空间应力回映算法步骤如下：

a）弹性预测

已知 t_{n} 时刻的状态变量和当前迭代步的应变增量 $\mathrm{D}e$，弹性预测状态如下：

$$\left.\begin{aligned}
&e_n^{\mathrm{e\ trial}}:=e_n^{\mathrm{e}}+\mathrm{D}e\text{，}\quad \bar{e}_{n+1}^{\mathrm{p}}:=\bar{e}_n^{\mathrm{p}}\text{，}\\
&s_{n+1}^{\mathrm{trial}}:=2G_{\mathrm{D}}e_{\mathrm{d}\ n+1}^{\mathrm{e\ trial}}+K_{\mathrm{D}}e_{\mathrm{v}\ n+1}^{\mathrm{e\ trial}}\boldsymbol{I}\text{。}
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

式中　G_{D} 为考虑损伤的剪切模量，K_{D} 为考虑损伤的体积模量，:= 为赋值符号，表示覆盖之前的值。

将试算应力转换为主应力 s_i^{trial}，代入屈服函数进行判断，如果屈服函数

$$f_1 = s_1^{\text{trial}} - s_3^{\text{trial}} + (s_1^{\text{trial}} + s_3^{\text{trial}})\sin j -$$
$$2c(1-D)\cos j \leqslant 0 \quad , \tag{19}$$

则当前计算步仍在弹性区，对所有变量进行更新：

$$s_{n+1} = s_{n+1}^{\text{trial}} \quad 。 \tag{20}$$

如果式（19）不成立，则需进行塑性修正，将试算应力映射回屈服面上。

b）塑性修正

假设更新应力位于屈服函数主平面上，则由塑性流动向量式（10）可知，需对塑性因子 Δg 进行求解。

假设初值：

$$\Delta g := 0 \quad , \quad \bar{e}_{n+1}^{\text{p}} := \bar{e}_n^{\text{p}} \quad 。 \tag{21}$$

此时相应的屈服函数为

$$f_1 = s_1^{\text{trial}} - s_3^{\text{trial}} + (s_1^{\text{trial}} + s_3^{\text{trial}})\sin j -$$
$$2c(\bar{e}_n^{\text{p}})(1-D)\cos j \quad 。 \tag{22}$$

建立 New-Raphson 迭代式对 Δg 进行求解：

$$\left.\begin{aligned} &H := \left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\bar{e}^{\text{p}}}\right|_{\bar{e}_{n+1}^{\text{p}}} \quad , \\ &d := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\Delta g} = -4G_D\left(1+\frac{1}{3}\sin y\ \sin j\right) - \\ &\quad 4K_{\text{D}}\sin y\ \sin j - 4H(1-D)^2\cos^2 j \ , \\ &\Delta g := \Delta g - f_1/d \ 。 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

进行收敛性判断：

$$D\bar{e}_{n+1}^{\text{p}} := \bar{e}_n^{\text{p}} + 2\cos j Dg \quad , \tag{24}$$

$$f_1(Dg) := (s_1^{\text{trial}} - s_3^{\text{trial}}) + (s_1^{\text{trial}} + s_3^{\text{trial}})\sin j -$$
$$2c(\bar{e}_n^{\text{p}} + D\bar{e}^{\text{p}})\cos j - a\Delta g \quad , \tag{25}$$

式中，$a = 4G_{\text{D}}\left(1+\dfrac{1}{3}\sin j\ \sin y\right) + 4K_{\text{D}}\sin j\ \sin y$ 。

当$|f|\leqslant$tol 时（tol 为容许误差，本文中取 tol=1×10^{-5}），计算完成，更新应力状态：

$$\begin{aligned} &s_1 = s_1^{\text{trial}} - \Delta g\left[2G_{\text{D}}\left(1+\frac{1}{3}\sin y\right) + 2K_{\text{D}}\sin y\right] , \\ &s_2 = s_2^{\text{trial}} + \Delta g\left(\frac{4}{3}G_{\text{D}} - 2K\right)\sin y \quad , \\ &s_3 = s_3^{\text{trial}} - \Delta g\left[2G_{\text{D}}\left(1-\frac{1}{3}\sin y\right) - 2K_{\text{D}}\sin y\right] 。 \end{aligned} \tag{26}$$

对更新后的应力进行判定，如果 $s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3$，则应力更新成立，对应力、应变和损伤变量进行更新，退出当前迭代步；否则假设返回应力位于棱线上。

在 M–C 准则的任意棱线上有偏应力 s_i=s_j，其偏应力更新方程为

$$\boldsymbol{s}_{n+1} = \boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2G_{\text{D}}(\Delta g^a \boldsymbol{N}_{\text{d}}^a + \Delta g^b \boldsymbol{N}_{\text{d}}^b) \quad , \tag{27}$$

式中，$\boldsymbol{N}_{\text{d}}^a$，$\boldsymbol{N}_{\text{d}}^b$ 为 $\boldsymbol{N}^a$，$\boldsymbol{N}^b$ 的偏量部分。令 $\boldsymbol{T}$ 为垂直于 $\boldsymbol{N}_{\text{d}}^a$ 的偏张量，则 $\boldsymbol{T}$ 为

$$T_1 = 1 - \sin y \ , \quad T_2 = -2 \ , \quad T_3 = 1 + \sin y \quad 。 \tag{28}$$

令

$$S = \boldsymbol{T} : s_{n+1}^{\text{trial}} = T_1 s_1 + T_2 s_2 + T_3 s_3$$
$$= (1-\sin y)s_1 - 2s_2 + (1+\sin y)s_3 \quad , \tag{29}$$

则由图 5 的几何关系可知，当 $S>0$ 时，更新应力应在右棱线上，$S<0$ 时，更新应力在左棱线。

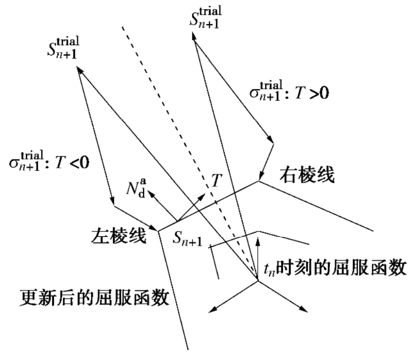


图 5 棱线回映区域判断

Fig. 5 Selection of edge return

当返回应力位于右棱线时，根据塑性流动法则式（12），（13），对 Δg^a 和 Δg^b 进行求解。

设定迭代计算初始值：

$$\Delta g^a = 0 \quad , \quad \Delta g^b = 0 \quad , \quad \bar{e}_{n+1}^{\text{p}} := \bar{e}_n^{\text{p}} \quad , \tag{30}$$

在右棱线处应满足屈服方程 f_1=0，f_6=0，即

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_6 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \bar{s}^a - 2(1-D)c(\bar{e}_n^{\text{p}})\cos j \\ \bar{s}^b - 2(1-D)c(\bar{e}_n^{\text{p}})\cos j \end{bmatrix} \quad , \tag{31}$$

式中，

$$\bar{s}^a = s_1^{\text{trial}} - s_3^{\text{trial}} + (s_1^{\text{trial}} + s_3^{\text{trial}})\sin j \quad , \tag{32}$$

$$\bar{s}^b = s_1^{\text{trial}} - s_2^{\text{trial}} + (s_1^{\text{trial}} + s_2^{\text{trial}})\sin j \quad 。 \tag{33}$$

建立 Δg^a 和 Δg^b 的 Newton-Raphson 迭代式子：

$$H := \left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\bar{e}^{\text{p}}}\right|_{\bar{e}_{n+1}^{\text{p}}} \quad , \tag{34}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta g^a \\ \Delta g^b \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \Delta g^a \\ \Delta g^b \end{bmatrix} - d^{-1}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad 。 \tag{35}$$

式中，d 为残差矩阵，

$$d := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \Delta g^a} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \Delta g^b} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \Delta g^a} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \Delta g^b} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -a-4H\cos^2 j & -b-4H\cos^2 j \\ -b-4H\cos^2 j & -a-4H\cos^2 j \end{bmatrix} , \tag{36}$$

式中，

$$a = 4G_{\text{D}}\left(1+\frac{1}{3}\sin j\ \sin y\right) + 4K_{\text{D}}\sin j\ \sin y \quad , \tag{37}$$

$$b = 2G_{\text{D}}\left(1+\sin j + \sin y - \frac{1}{3}\sin j\ \sin y\right) + 4K_{\text{D}}\sin j\ \sin y 。 \tag{38}$$

进行收敛性判断：

$$\bar{e}_{n+1}^{\text{p}} := \bar{e}_n^{\text{p}} + 2\cos j(\Delta g^a + \Delta g^b) \quad , \tag{39}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_6 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \bar{s}_a - a\Delta g^{\text{a}} - b\Delta g^b - 2(1-D)c(\bar{e}_{n+1}^{\text{p}})\cos j \\ \bar{s}_b - b\Delta g^a - a\Delta g^b - 2(1-D)c(\bar{e}_{n+1}^{\text{p}})\cos j \end{bmatrix} 。 \tag{40}$$

当满足 $|f_1|+|f_6|<0$ 时，退出迭代过程，将求得 Δg^a 和 Δg^b 代入下式进行更新：

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= s_1^{\mathrm{trial}} - \left[2G_{\mathrm{D}}\left(1+\frac{1}{3}\sin y\right)+2K_{\mathrm{D}}\sin y\right]\cdot (\Delta g^a+\Delta g^b),\\ s_2 &= s_2^{\mathrm{trial}}+\left(\frac{4}{3}G_{\mathrm{D}}-2K_{\mathrm{D}}\right)\sin y\,\Delta g^a + \left[2G_{\mathrm{D}}\left(1-\frac{1}{3}\sin y\right)-2K\sin y\right]\Delta g^b,\\ s_3 &= s_3^{\mathrm{trial}}+\left[2G_{\mathrm{D}}\left(1-\frac{1}{3}\sin y\right)-2K_{\mathrm{D}}\sin y\right]\cdot \Delta g^a+\left(\frac{4}{3}G_{\mathrm{D}}-2K_{\mathrm{D}}\right)\sin y\,\Delta g^b 。\end{aligned}\right\}\quad(41)$$

当返回左棱线时，将式（33），（38）重写，其他表达式不变：

$$\bar{s}^b = s_1^{\mathrm{trial}} - s_2^{\mathrm{trial}} + (s_1^{\mathrm{trial}}+s_2^{\mathrm{trial}})\sin j \quad ,\qquad (42)$$

$$b=2G_{\mathrm{D}}\left(1+\sin j+\sin y-\frac{1}{3}\sin j\,\sin y\right)+4K_{\mathrm{D}}\sin j\,\sin y 。\qquad (43)$$

此时的应力更新表达式如下：

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= s_1^{\mathrm{trial}} - \left[2G_{\mathrm{D}}\left(1+\frac{1}{3}\sin y\right)+2K_{\mathrm{D}}\sin y\right]\Delta g^a + \left(\frac{4}{3}G_{\mathrm{D}}-2K_{\mathrm{D}}\right)\sin j\,\Delta g^b ,\\ s_2 &= s_2^{\mathrm{trial}}+\left(\frac{4}{3}G_{\mathrm{D}}-2K_{\mathrm{D}}\right)\sin y\,\Delta g^a - \left[2G_{\mathrm{D}}\left(1+\frac{1}{3}\sin y\right)+2K_{\mathrm{D}}\sin y\right]\Delta g^b ,\\ s_3 &= s_3^{\mathrm{trial}}+\left[2G_{\mathrm{D}}\left(1-\frac{1}{3}\sin y\right)-2K_{\mathrm{D}}\sin y\right](\Delta g^a+\Delta g^b) 。\end{aligned}\right\}\quad(44)$$

对更新后的应力重新进行判断，如果满足 $s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3$，返回右（左）棱线成立，否则返回尖点。

M-C 屈服准则的顶点在静力水准轴上，其值为 $p=c\cot j$，应力回映公式为

$$p_{n+1}=p_{n+1}^{\mathrm{trial}}-K_{\mathrm{D}}\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}} \quad 。\qquad (45)$$

由图 6 可知，此时有 $p_{n+1}=p$，即

$$c(\bar{e}_n^{\mathrm{p}}+\Delta\bar{e}^{\mathrm{p}})\cot j - p_{n+1}^{\mathrm{trial}}+K_{\mathrm{D}}\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}=0 \quad 。\qquad (46)$$

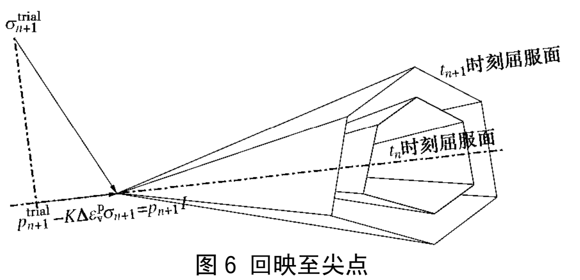


图 6　回映至尖点

Fig. 6 Return to apex

又由 $\Delta e^{\mathrm{p}}=\dfrac{\cos j}{\sin y}\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}$ 可知，式（46）为 $\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}$ 的函数，可利用 Newton-Raphson 法对 $\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}$ 进行求解。

设置迭代初始值：

$$\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}} := 0 \quad , \quad \bar{e}_{n+1}^{\mathrm{p}} := \bar{e}_n^{\mathrm{p}} \quad 。\qquad (47)$$

由式（46）建立残差方程：

$$r := c(\bar{e}_n^{\mathrm{p}})\cot j - p_{n+1}^{\mathrm{trial}} \quad ,\qquad (48)$$

建立关于 $\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}$ 的迭代式：

$$\left.\begin{aligned} H &:= \left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\bar{e}^{\mathrm{p}}}\right|_{\bar{e}_{n+1}^{\mathrm{p}}} ,\\ d &:= \frac{H\cos j\,\cot j}{\sin y}+K_D ,\\ \Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}} &:= \Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}} - r/d \quad 。\end{aligned}\right\}\qquad (49)$$

计算残差，进行收敛性检验：

$$\left.\begin{aligned} \bar{e}_{n+1}^{\mathrm{p}} &:= \bar{e}_n^{\mathrm{p}} + \frac{\cos j}{\sin y}\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}} ,\\ p_{n+1} &:= p_{n+1}^{\mathrm{trial}} - K_D\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}} ,\\ r &:= c(\bar{e}_{n+1}^{\mathrm{p}})\cot j - p_{n+1} 。\end{aligned}\right\}\qquad (50)$$

如果 $|r| \leqslant \mathrm{tol}$，则计算收敛，对应力进行更新：

$$s_1 := s_2 := s_3 := p_{n+1} \quad 。\qquad (51)$$

c）损伤修正

应力计算完成后对损伤变量进行更新，其表达式为

$$\bar{e}_{n+1}^{\mathrm{p}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(e_{\mathrm{p}i,n+1}-e_{\mathrm{p}(i+1),n+1})^2} \quad ,\qquad (52)$$

$$D_{n+1}=1-\exp[-k(\bar{e}_{n+1}^{\mathrm{p}}-\bar{e}_0^{\mathrm{p}})] \quad 。\qquad (53)$$

2.2　弹塑性本构矩阵求解方法

本质上看，弹塑性本构矩阵需要求得应力张量对应变张量的微分表达式，即

$$\frac{\partial \tilde{s}_i}{\partial e_j^{\mathrm{e\ trial}}} \quad (i=1, 2, 3) \quad ,\qquad (54)$$

式中，$\tilde{s}_i$ 为更新后主应力的隐式方程：

$$s_i = \tilde{s}_i(e_1^{\mathrm{trial}}, e_2^{\mathrm{trial}}, e_3^{\mathrm{trial}}) \quad 。\qquad (55)$$

当返回应力位于主屈服面上时，对式（26）求导：

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}s_1 &= \mathrm{d}s_1^{\mathrm{trial}} - \left[2G_{\mathrm{D}}\left(1+\frac{1}{3}\sin y\right)+2K_{\mathrm{D}}\sin y\right]\mathrm{d}\Delta g ,\\ \mathrm{d}s_2 &= \mathrm{d}s_2^{\mathrm{trial}} + \left(\frac{4G_{\mathrm{D}}}{3}-2K_{\mathrm{D}}\right)\sin y\,\mathrm{d}\Delta g ,\\ \mathrm{d}s_3 &= \mathrm{d}s_3^{\mathrm{trial}} + \left[2G_{\mathrm{D}}\left(1-\frac{1}{3}\sin y\right)-2K_{\mathrm{D}}\sin y\right]\mathrm{d}\Delta g 。\end{aligned}\right\}\quad(56)$$

根据一致性条件，对屈服函数进行求导可得 $\mathrm{d}Dg$：

$$\mathrm{d}f_1 = \mathrm{d}s_1^{\mathrm{trial}} - \mathrm{d}s_3^{\mathrm{trial}} + (\mathrm{d}s_1^{\mathrm{trial}}+\mathrm{d}s_3^{\mathrm{trial}})\sin f - (4H\cos^2 j + a)\mathrm{d}\Delta g = 0 \quad ,\qquad (57)$$

式中，a 的表达式同（37）。

将线性关系式 $s_{n+1}^{\mathrm{trial}} = D^{\mathrm{e}} : e_{n+1}^{\mathrm{e\ trial}}$ 与式（56），（57）进行联立即可求得一致切线模量显式表达式，这里不

再赘述。

当返回应力位于右（左）棱线时，求解过程同上，对屈服函数 f_1，f_6（或 f_1，f_2）和式（32）（或式（35））进行求导，与线性关系式进行联立即可求得一致切线模量表达式。

当返回应力位于尖点时，对式（45）进行求导：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_i &= \mathrm{d}p_{n+1}^{\mathrm{trial}} - K\,\mathrm{d}\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}} \\ &= K(\mathrm{d}e_1^{\mathrm{trial}} + \mathrm{d}e_2^{\mathrm{trial}} + \mathrm{d}e_3^{\mathrm{trial}} - \mathrm{d}\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}) \quad。\end{aligned} \tag{58}$$

由一致性条件对式（46）进行求导可得

$$\frac{H\cos j\ \cot j}{\sin y}\mathrm{d}\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}} - K(\mathrm{d}e_1^{\mathrm{trial}} + \mathrm{d}e_2^{\mathrm{trial}} + \mathrm{d}e_3^{\mathrm{trial}} - \mathrm{d}\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}) = 0。 \tag{59}$$

由式（59）可得

$$\mathrm{d}\Delta e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}} = \frac{K}{K + \dfrac{\cos j\ \cot j}{\sin y}H}(\mathrm{d}e_1^{\mathrm{trial}} + \mathrm{d}e_2^{\mathrm{trial}} + \mathrm{d}e_3^{\mathrm{trial}})\ 。 \tag{60}$$

将式（60）代入式（58）求得一致性切线模量表达式：

$$\frac{\partial s_i}{\partial e_j^{\mathrm{e\ trial}}} = K\left(1 - \frac{K}{K + \dfrac{\cos j\ \cot j}{\sin y}H}\right) \quad。 \tag{61}$$

2.3 渗流有限元计算

利用变分原理建立方程（7）的有限元求解式：

$$[K_{\mathrm{s}}]\{h\} = \{f_{\mathrm{s}}\} \quad , \tag{62}$$

式中，$[K_{\mathrm{s}}]$ 为渗透矩阵，$\{h\}$ 为水头列向量，$\{f_{\mathrm{s}}\}$ 为形成总矩阵时由已知节点值所得的常数项。

2.4 弹塑性损伤-渗流迭代求解过程

渗流场产生的孔隙水压通过有效应力原理对岩石应力状态的产生影响：

$$s'_{ij} = s_{ij} - d_{ij}a\,p \quad 。 \tag{63}$$

式中 s'_{ij} 为有效应力张量（压为正，拉为负）；p 为孔隙水压；a 为等效孔隙水压系数，$0 \leqslant a \leqslant 1$；$d_{ij}$ 为 Kroneker 符号。

应力场发生改变后，体积应变随之变化，通过式（8）对渗透系数产生影响，从而改变岩石的渗透特性，应力、渗流两种作用反复耦合直到进入一种动态稳定状态。具体迭代过程见文献[8]。

2.5 离心加载有限元法

利用有限元程序进行离心加载计算时，保持 c 和 φ 不变，逐步增加模型的重度，直到计算不收敛为止（泊松比会影响塑性区分布，选择塑性区贯通作为判据不合理[16]），即认为边坡达到破坏。安全系数 K 的定义为

$$K = \frac{g + g(S_{\mathrm{step}} - 1)D_g}{g} = 1 + (S_{\mathrm{step}} - 1)D_g \quad , \tag{64}$$

式中，S_{step} 为计算模型破坏时最大加载步数，D_g 离心加载系数，g 为重度。

3 岩质边坡稳定性分析

建立边坡有限元计算模型如图 7 所示，坡高 H=20 m，重度 γ=20 kN/m^3，内摩擦角 j =17°，黏聚力 c=42 kPa，c_{r}=8.4 kPa，损伤参数 k =20，z = 0.6，固定水头高度 d_1=15 m，d_2=10 m，初始渗透系数 K_x=K_y=6×10^{-3} m/d，等效孔隙水压系数 a =1.0，孔隙度 n_0=0.3。模型作用两边施加水平约束边界条件，底部施加固定边界条件，坡面为透水边界，坡底为不透水边界。设置离心加载系数 D_g =0.01，分别对不同边坡角下无损伤、渗流，有损伤、无渗流和有损伤、有渗流状态下的边坡安全系数进行计算，结果如表 1 所示。

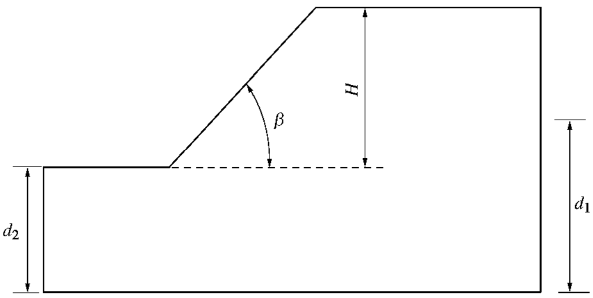


图 7 有限元计算示意图

Fig. 7 Finite element model

表 1 边坡安全系数

Table 1 Factors of safety of slopes

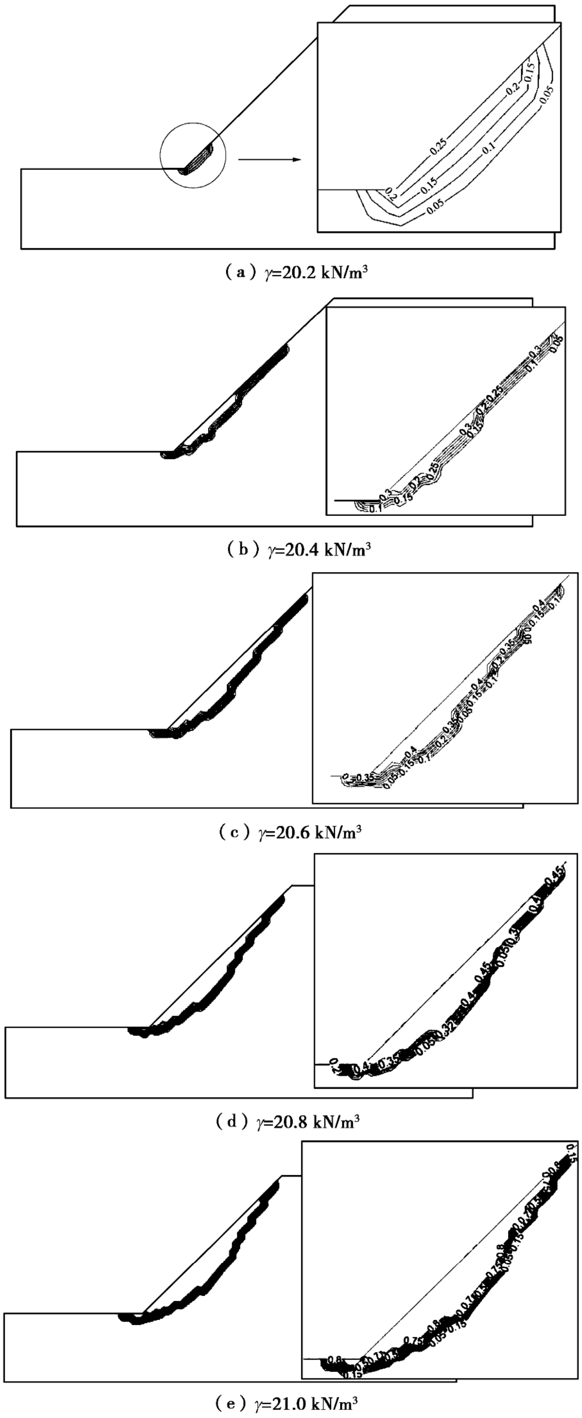
方法	不同坡脚下稳定安全系数				
	30°	35°	40°	45°	50°
spence 法	1.55	1.41	1.30	1.20	1.12
FEM 无损伤、无渗流	1.64	1.51	1.43	1.35	1.27
FEM 有损伤、无渗流	1.42	1.28	1.11	1.08	1.08
FEM 有损伤、有渗流	1.38	1.21	1.08	1.05	破坏

由表 1 可知，在不考虑岩石损伤、渗流的条件下，离心加载法计算所得安全系数与传统 spencer 法求得的安全系数相比较大，这是因为在 Mohr–Coulomb 准则中，岩土材料的抗剪强度与法线应力成正比例关系，不断增加岩体重度的同时，其抗剪强度也在增长，因此得到的安全系数较大。当考虑材料损伤特性时，边坡安全系数大幅降低，这是因为在重度加载过程中，局部材料发生软化现象，强度降低，使得计算过早出现不收敛。施加渗流场后，边坡安全系数均进一步降低，当前状态下边坡角为 50°的边坡已经发生失稳破坏，地下水的渗流作用进一步减小了边坡的抗滑强度。

边坡角为 45°时，重度增加过程中边坡损伤分布图如图 9 所示。

通过图 8 可以看到边坡渐进破坏全过程，随着重度的增加，坡脚处首先产生损伤并向坡顶逐渐扩张，最终形成损伤带。最大损伤值均出现在靠近坡面处，并向坡体内部逐渐减小。图 8（a）中，坡脚附近最大

损伤值为 0.25，随着破坏的发展，坡脚处损伤逐步累积，图 8（e）中，坡脚处的最大损伤值为 0.8，继续增加重度，计算出现不收敛，边坡发生失稳破坏。



（a）γ=20.2 kN/m³

（b）γ=20.4 kN/m³

（c）γ=20.6 kN/m³

（d）γ=20.8 kN/m³

（e）γ=21.0 kN/m³

图 8　边坡渐进破坏过程

Fig. 8 Slope failure process

4　工程应用

本文选取国道丹东至阿勒泰公路 K381+515 断面（图 9）进行稳定性分析。该断面临近云峰水库，边坡稳定性受到水库水位变化及北方冰雪解冻和降雨季节的影响。

建立有限元数值模型如图 10 所示，模型尺寸为 40 m×30 m，共划分为 1077 个节点和 1010 个单元，模型两侧施加水平边界条件，底部施加固定边界条件，边坡底部为不透水边界，坡面为透水边界，固定下游水头高度 h_1=10 m，分别取上游水头高度 h_2=15 m，25 m，35 m，设置 5 个监测点进行提取结果。计算时取岩石力学参数弹性模量 E=2 GPa，泊松比n =0.3，内摩擦角 φ=30°，黏聚力 c=0.5 MPa，c_r=0.1 MPa，损伤参数由位移反分析[15]可得 $k=34$，$z=0.5$。渗透系数由现场抽水试验得出 K_x=K_y=6×10^{-3} m/d，初始孔隙比 n_0=0.03，计算监测点位水平位移如图 11 所示。

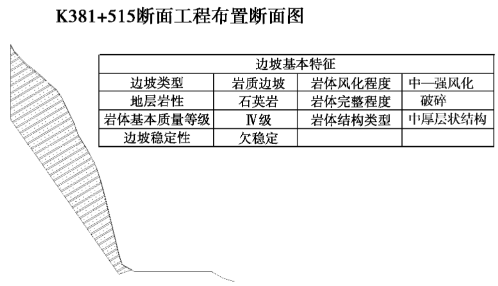


图 9　K381+515 断面地质图

Fig. 9 Geologic map of K381+515

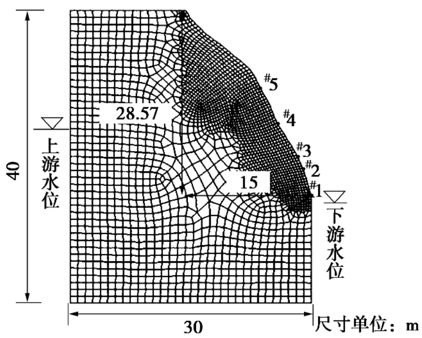


图 10　有限元计算示意图

Fig. 10 Mesh model for finite element calculation

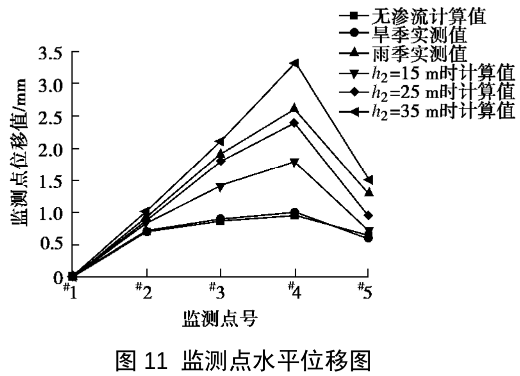
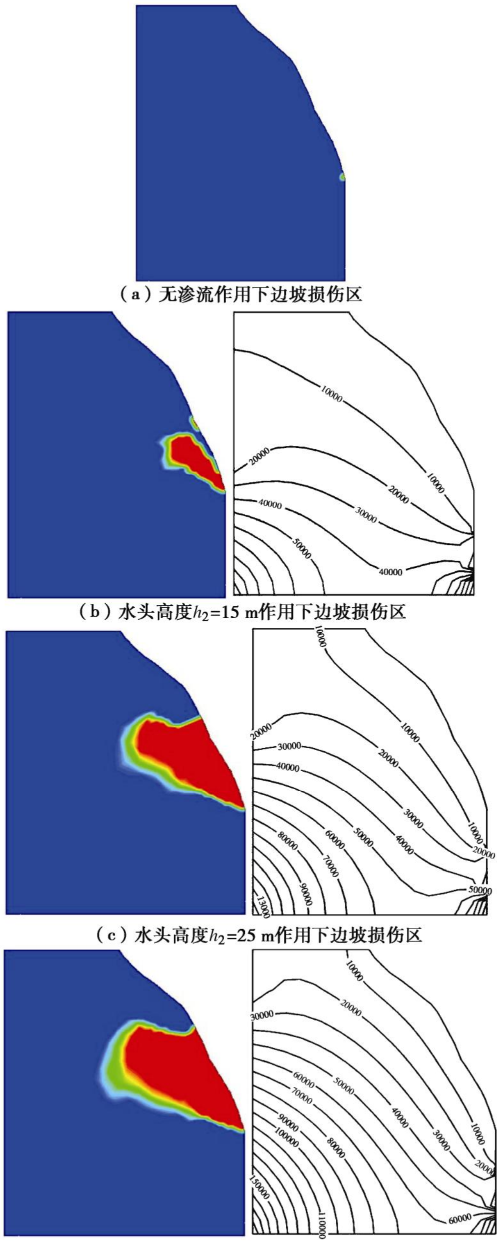


图 11　监测点水平位移图

Fig.11 Horizontal displacements at monitoring points

由图 11 可知，旱季时雨水较少，渗流现象不明显，位移实测值与无渗流条件下位移计算值较为接近。进入雨季后，位移实测值明显增大，变化规律与数值计算结果趋于一致。考虑渗流后，监测点处的水平位移值随着水头高度的增加逐渐增大，可见渗流场对边坡稳定性够成了足够威胁。计算不同水头高度下，边坡损伤场分布如图 12 所示。



（a）无渗流作用下边坡损伤区

（b）水头高度h_2=15 m作用下边坡损伤区

（c）水头高度h_2=25 m作用下边坡损伤区

（d）水头高度h_2=35 m作用下边坡损伤区

图 12 不同水头高度下边坡损伤区分布

Fig. 12 Distribution of damage under different water heights

由图 12（a）可知，在无渗流作用下，该断面边坡坡脚处已经出现损伤区，存在潜在危险，此时边坡安全系数为 1.53。施加水头后，水由高势能面流向低势能面，在坡面流出。当水头高度 h_2=15 m 时，原有边坡损伤区开始向内部扩张，坡面出现新的损伤区域。随着水头高度的增加，损伤区域逐渐扩展发生贯通，当水头高度 h_2=35 m 时，边坡安全系数为 1.04，接近失稳破坏。计算结果表明，既有边坡设计存在安全隐患，当雨季来临或冰雪消融引起上游水位升高时，边坡损伤区会发生扩张，进而影响到边坡整体的稳定性。

对图 12 中所示监测点损伤值变化规律见图 13。由图 13 可知，无渗流状态下坡脚#1 监测点已经出现损伤，当水头高度升至 15 m 时，#2，#4 监测点发生损伤，水头高度为 25 m 时，5 个监测点都出现损伤。监测点处损伤值随水头高度的上升逐渐增加，最终损伤值分别达到 0.49，0.27，0.23，0.21，0.19。工程案例中的边坡坡面形状较为复杂，从几何形状上可以看作是三段坡面的组合，分别是#1～#3 监测点所在坡面，#4，#5 监测点所在坡面，#5 监测点以上的坡面。对于每组坡面，由前文的计算中可知，其水平位移都是从坡脚至坡顶逐渐减小的，而损伤首先发生在坡脚处，逐渐向坡顶发育。因此，对于第二段坡面，#5 监测点的位移应该是小于监测点 4 的，而损伤则首先出现在靠近坡脚的地方，即第一段坡面的#1，#2 监测点，第二段坡面的 4 号监测点。数值计算结果表明当前边坡存在安全隐患，需要采取工程措施进行加固，以免发生工程事故。

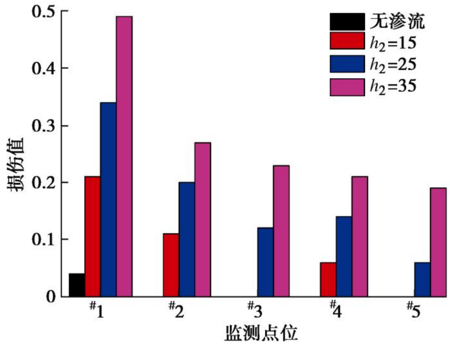


图 13 监测点位损伤值

Fig. 13 Damage values at monitoring points

5 结 论

本文建立了基于 M–C 准则的岩体弹塑性损伤–渗流耦合模型，并实现了模型的有限元求解过程。利用所编程序对多场耦合作用下的边坡稳定性进行分析，计算结果表明：

（1）随着重度的增加，损伤首先出现在边坡坡脚处并逐渐向坡顶发展，最后形成贯通的损伤带；损伤值最大处均出现在靠近坡面处，并向坡体内部逐渐减小。

（2）损伤场和渗流场的存在降低了边坡的安全系数，威胁到边坡的安全稳定性。

（3）随着水头高度的增加，边坡内部的损伤范围和最大损伤值也出现增大现象，所编程序很好的体现了损伤场与渗流场之间的耦合作用。

参考文献：

[1] 郑颖人, 赵尚毅, 时卫民, 等. 边坡稳定分析的一些进展[J]. 地下空间与工程学报, 2001, **21**(4): 262 – 271. (ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi, SHI Wei-min, et al. Progress in Analysis of Slope Stability[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2001, **21**(4): 262 – 271. (in Chinese))

[2] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(3): 343 – 346.

(ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min, et al. Analysis on safety factor of slope by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(3): 343－346. (in Chinese))

[3] 朱彦鹏, 杨晓宇, 马孝瑞, 等. 边坡稳定性分析双折减法的几个问题[J]. 岩土力学, 2018, **39**(1): 331－338. (ZHU Yan-peng, YANG Xiao-yu, MA Xiao-rui, et al. Several questions of double reduction method for slope stability analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, **39**(1): 331－338. (in Chinese))

[4] 白　冰, 袁　维, 石　露, 等. 一种双折减法与经典强度折减法的关系[J]. 岩土力学, 2015, **36**(5): 1275－1281. (BAI Bing, YUAN Wei, SHI Lu, et al. Comparing a new double reduction method to classic strength reduction method for slope stability analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(5): 1275－1281. (in Chinese))

[5] 唐春安, 唐烈先, 李连崇, 等. 岩土破裂过程分析 RFPA 离心加载法[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(1): 71－76. (TANG Chun-an, TANG Lie-xian, LI Lian-cong, et al. Centrifugal loading method of RFPA for the failure process analysis of rock and soil structure[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(1): 71－76. (in Chinese))

[6] 曹建建, 邓　安. 离心加载有限元方法在边坡稳定分析中的应用[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(增刊): 1336－1339. (CAO Jian-jian, DENG An. Centrifugal loading finite element method for slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(S0): 1336－1339. (in Chinese))

[7] 肖　武. 基于强度折减法和容重增加法的边坡稳定分析及工程研究[D]. 南京: 河海大学, 2005. (XIAO Wu. Slope stability study on strength reduction and gravity increase method and its engineering application[D]. Nanjing: HoHai University, 2005. (in Chinese))

[8] 王军祥, 姜谙男, 宋战平. 岩石弹塑性应力–渗流–损伤耦合模型研究(Ⅰ):模型建立及其数值求解程序[J]. 岩土力学, 2014, **35**(增刊 2): 626－637. (WANG Jun-xiang, JIANG An-nan, SONG Zhan-ping. Study of the coupling model of rock elastoplastic stress-seepage-damage (I): modelling and its numerical solution procedure[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(S2): 626－637, 644. (in Chinese))

[9] 陆银龙, 王连国, 杨　峰, 等. 软弱岩石峰后应变软化力学特性研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, **29**(3): 640－648. (LU Yin-long, WANG Lian-guo, YANG Feng, et al. Post-peak strain softening mechanical properties of weak rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, **29**(3): 640－648. (in Chinese))

[10] 袁小平, 刘红岩, 王志乔. 基于 Drucker-Prager 准则的岩石弹塑性损伤本构模型研究[J]. 岩土力学, 2012, **33**(4): 148－153. (YUAN Xiao-ping, LIU Hong-yan, WANG Zhi-qiao. Study of elastoplastic damage constitutive model of rocks based on Drucker-Prager criterion[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, **33**(4): 1103－1108. (in Chinese))

[11] 曹文贵, 赵　衡, 张　玲, 等. 考虑损伤阀值影响的岩石损伤统计软化本构模型及其参数确定方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, **27**(6): 1148－1154. (CAO Wen-gui, ZHAO Heng, ZHANG ling, et al. Damage statistical softening constitutive model for rock considering effect of damage threshold and its parameters determination method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, **27**(6): 1148－1154. (in Chinese))

[12] 王军祥, 姜谙男, 宋战平. 岩石弹塑性应力–渗流–损伤耦合模型研究(Ⅱ):参数反演及数值模拟[J]. 岩土力学, 2015, **36**(12): 3606－3614. (WANG Jun-xiang, JIANG An-nan, SONG Zhan-ping. An elastoplastic stress-seepage-damage coupling model of rock (Ⅱ): parametric inversion and numerical simulation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(12): 3606－3614. (in Chinese))

[13] 贾善坡, 陈卫忠, 于洪丹, 等. 泥岩隧道施工过程中渗流场与应力场全耦合损伤模型研究[J]. 岩土力学, 2009, **30**(1): 19－26. (JIA Shan-po, CHEN Wei-zhong, YU Hong-dan, et al. Research on seepage-stress coupling damage model of Boom clay during tunneling[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(1): 19－26. (in Chinese))

[14] 刘　扬, 杨　刚, 王军祥, 等. 岩石莫尔–库仑弹塑性损伤本构模型及其主应力隐式返回映射算法研究[J]. 岩土力学, 2017, **38**(增刊 1): 418－428. (LIU Yang, YANG Gang, WANG Jun-xiang, et al. Mohr-Coulomb elastoplastic damage constitutive model of rock and implicit return mapping algorithm in principal stress space[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, **38**(S1): 418－428. (in Chinese))

[15] 茹忠亮, 赵洪波. 弹塑性计算中 Mohr-Coulomb 准则屈服面奇异点处理方法[J]. 河南理工大学学报(自然科学版), 2013, **32**(4): 486－489. (RU Zhong-liang, ZHAO Hong-bo. Methodology for handing singular points on the Mohr-Coulomb yield surface in elasto-plastic computational procedures[J]. Journal of Henan Polytechnic University, 2013, **32**(4): 486－489. (in Chinese))

[16] 赵尚毅, 郑颖人, 张玉芳. 极限分析有限元法讲座——Ⅱ有限元强度折减法中边坡失稳的判据探讨[J]. 岩土力学, 2005, **26**(2): 332－336. (ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, ZHANG Yu-fang. Study on slope failure criterion in strength reduction finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, **26**(2): 332－336. (in Chinese))