

DOI: 10.11779/CJGE201907014

考虑 T 应力的岩石压剪裂纹起裂机理

刘红岩

(中国地质大学(北京)工程技术学院, 北京 100083)

摘要: 传统断裂理论在研究岩石压剪裂纹起裂机理时, 往往仅考虑裂纹尖端应力场 Williams 展开式中的 $r^{1/2}$ 奇异应力项, 而忽略了非奇异应力项 (T 应力) 的影响, 造成理论预测值与试验结果不符。在对压剪应力下裂纹受力特征进行分析的基础上, 将 T 应力引入传统断裂力学的最大周向应力准则, 提出了考虑 T 应力的修正最大周向应力准则。同时考虑压剪应力下的裂纹应力传递特点, 在上述准则中又引入裂纹面法向刚度及切向刚度等变形参数。最终建立了能够同时考虑岩石性质和裂纹几何参数(如裂纹倾角、长度等)、强度参数(裂纹面摩擦系数)及变形参数(裂纹面法向及切向刚度)的最大周向应力准则, 更好地反映了岩石压剪裂纹起裂机理。算例表明由该方法计算得到的翼裂纹起裂角与试验结果吻合较好, 同时通过参数敏感性分析发现裂纹尖端相对临界尺寸对翼裂纹起裂角的影响最大。

关键词: T 应力; 岩石; 压剪断裂; 翼裂纹起裂角; 最大周向应力准则; 裂纹面法向及切向刚度

中图分类号: TU443

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2019)07-1296-07

作者简介: 刘红岩(1975—), 男, 河南扶沟人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩体断裂损伤本构模型的相关研究工作。E-mail: lhy1204@cugb.edu.cn。

Initiation mechanism of cracks of rock in compression and shear considering T -stress

LIU Hong-yan

(College of Engineering and Technology, China University of Geosciences (Beijing), Beijing 100083, China)

Abstract: In the studies on the initiation mechanism of cracks of rock in compression and shear, the traditional fracture theory only considers the singular stress ($r^{1/2}$ term) of the elastic stress state near a crack tip in the Williams' series expression, and ignores the effects of the non-singular term (T -stress). It leads to the disagreement between the theoretical predictions and the experimental results. On the basis of analyzing the mechanical behaviors of cracks in compression and shear, the T -stress is introduced into the maximum tangential stress (MTS) criterion of the traditional fracture mechanics, and accordingly the revised MTS criterion is proposed by considering T -stress. Meanwhile, by considering the stress transfer of the cracks in compression and shear, the deformation parameters of cracks, e.g., the crack normal and shear stiffness, are also introduced into the original MTS criterion. Finally, the new MTS criterion is set up to simultaneously consider the properties of rock, the geometrical parameters of cracks (such as dip angle and length), the strength parameters (such as frictional coefficient of crack face), and the deformation parameters (such as crack normal and shear stiffness). Therefore, it can perfectly reflect the initiation mechanism of the cracks of rock in compression and shear. The example indicates that the initiation angle of wing crack obtained from the proposed method agrees well with that obtained from the tests, and it is also found through the sensitivity analysis for the parameters that the relative critical size at the crack tip has the most important influences on the initiation angle of wing crack.

Key words: T -stress; rock; compression and shear fracture; initiation angle of wing crack; maximum tangential stress criterion; crack normal and tangential stiffness

0 引 言

岩石是经过多次地质运动和人类工程活动而形成的一种含有节理、裂纹及微裂纹、微孔洞等多种不同尺度缺陷的天然损伤地质体, 而岩石的破坏实际上就是这些缺陷萌生、扩展及贯通的结果。因此研究岩

石裂纹的起裂机理、起裂角度及扩展路径等具有重要的理论和工程意义。

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金项目(53200759352); 国家级地质灾害应急防治项目(2019); 四川省自然资源科技计划项目(KJ-2018-23)

收稿日期: 2018-05-02

由 Griffith 于 1920 年提出的断裂力学为裂纹力学特性的研究奠定了理论基础, 其最早被应用于玻璃等脆性材料, 而后很快就引起了岩石力学界的关注并被加以应用。与传统断裂力学不同的是自然界中的岩石多处于受压状态, 因此岩石压剪断裂的理论研究一直是断裂力学及岩石力学的一个难点课题, 这一方面是因为传统断裂力学中没有压剪破坏的模型可供借鉴; 而另一方面也是因为岩石压剪断裂的试验结果和现有理论之间存在较大差异。为此不少学者对此展开研究, 目前较为一致的看法是传统断裂力学不适合描述岩石压剪断裂的根本原因是其没有考虑 T 应力的影响^[1-3], 即目前的研究在分析裂纹尖端应力场时大都只截取了 Williams 等^[4]展开式中的 $r^{1/2}$ 的奇异应力项, 而将高阶的 $O(r^{1/2})$ 项和非奇异应力项 (一般称为 T 应力) 忽略, 认为其对裂尖应力场的影响很小。尽管该理论也在一定程度上较好地解释了一些宏观断裂现象, 但随着研究的深入, 人们越来越认识到非奇异应力项对岩石断裂的重要影响。这是因为当 $r \rightarrow 0$ 时, 尽管 $O(r^{1/2})$ 项可以忽略不计, 但是 T 应力项是常数项, 并不随 r 变化, 且随着 r 的增加, 其对裂纹尖端应力场的影响也愈加显著。同时不少学者也通过试验验证了 T 应力的存在, 并对其大小进行了测试。Christophe 等^[5]采用光弹试验对疲劳裂纹的屏蔽力进行了定量测试, 发现裂纹尖端确实存在 T 应力。Colombo 等^[6]研究发现正、负 T 应力对裂纹尖端应力集中分别有放大或屏蔽效应。Matvienko 等^[7]考虑 T 应力对石灰岩 I/II 型混合裂纹的断裂扩展角进行预测, 发现其理论预测结果与试验结果吻合较好。Williams 等^[1]对含中心斜裂纹的有机玻璃进行拉伸试验, 发现当在最大周向应力准则中考虑 Williams^[4]展开式中的非奇异项时, 所得理论结果与试验结果吻合较好。Simth 等^[8]研究了在复合外载下, T 应力对一条直线裂纹偏折或分叉的影响作用, 并强调了其对脆性断裂的影响。但是上述研究结果均是针对拉伸荷载下, T 应力对裂纹扩展路径及起裂强度等的影响, 由于裂纹面受拉伸而分离, 因此此时 T 应力只包含沿裂纹方向的分量。Li 等^[9]对压缩下的闭合裂纹进行了研究, 认为在裂纹尖端同时存在沿裂纹方向的分量 T_x 和垂直于裂纹方向的分量 T_y , 并认为 T_x 将减小翼裂纹起裂角, 并增加 II 型裂纹的断裂韧度, 而 T_y 则增加翼裂纹起裂角, 并增加 II 型裂纹的断裂韧度。唐世斌等^[3]基于最大周向应力准则 (MTS) 研究了 T 应力对压剪岩石裂纹起裂及扩展的影响, 认为压剪应力下非奇异应力项 T_x , T_y 对裂纹的起裂角度及断裂强度均有重要影响。而赵彦琳等^[10]认为闭合裂纹尖端的应力应同时包含应力强度因子的奇异项和 3 个 T 应力分量即 T_x , T_y 和 T_{xy} 的非奇异项。

而后, 基于上述研究, 学者们认为既然 T 应力对岩石裂纹扩展有较大影响, 因此应该在传统断裂准则中引入 T 应力的影响。Williams 等^[1]、Finnie 等^[11]提出了考虑 T 应力的 MTS 准则。Smith 等^[12]提出了包含应力强度因子 K_I , K_{II} , T 应力及断裂过程区 r_c 的广义 MTS 准则, 探讨了 T 应力对脆性断裂的影响。Rashidi 等^[13]通过考虑 T 应力对传统的应变能密度因子准则进行了修正。唐世斌等^[14]为克服最大周向应力准则与材料参数及平面问题类型无关的不足, 提出了考虑 T 应力的最大周向应变断裂准则, 揭示了泊松比、侧压系数及裂纹面摩擦系数等对翼裂纹起裂的影响。赵彦琳等^[10]提出了考虑 T_x , T_y 和 T_{xy} 等 3 个 T 应力分量的 MTS 准则。由于 MTS 断裂准则形式简单, 其运用至今仍较为普遍, 尤其是岩石这类抗拉强度较低的材料, MTS 断裂准则似乎更能接近于实际情况。但是, 目前即使是考虑了 T 应力的 MTS 断裂准则, 仍然认为岩石断裂机理及翼裂纹起裂角与裂纹法向和切向刚度等裂纹变形参数无关, 而 Prudencio 等^[15]通过对含断续裂纹的岩体压缩试验表明其峰值强度等力学特性同样受裂纹法向和切向刚度的影响。因此如何更全面地反映岩体及裂纹参数对岩石断裂强度及翼裂纹起裂角的影响也一直是 MTS 准则的发展趋势。

为此拟在前人研究的基础上, 针对平面问题以 MTS 准则为例研究 T 应力对 I - II 复合型裂纹断裂准则及翼裂纹起裂角度的影响, 进而得到能够同时考虑岩石弹性参数 (如弹性模量及泊松比) 和裂纹几何参数 (如裂纹长度及倾角)、强度参数 (如裂纹面摩擦系数) 及变形参数 (如裂纹法向及切向刚度) 的翼裂纹起裂角计算方法, 以探讨 T 应力对岩石压剪裂纹断裂机理的影响。

1 传统的岩石压剪 I - II 型复合裂纹扩展准则

根据传统断裂理论, 图 1 所示裂纹尖端应力场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $K_I = \sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}$, $K_{II} = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\pi a}$ 为 I、II 型应力强度因子, σ_y^∞ , τ_{xy}^∞ 为远场应力分量; σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 为局部坐标系 $x-y$ 下裂纹尖端应力; r , θ 为极径和极角; a 为裂纹半长。

用极坐标表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[K_I(3 - \cos\theta) \cos \frac{\theta}{2} + K_{II}(3 \cos\theta - 1) \sin \frac{\theta}{2} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I(1 + \cos\theta) - 3K_{II} \sin\theta \right], \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \sin\theta + K_{II}(3 \cos\theta - 1) \right], \end{aligned} \right\} (2)$$

式中, σ_r , σ_θ 和 $\tau_{r\theta}$ 分别为极坐标 $r - \theta$ 下的裂纹尖端应力。

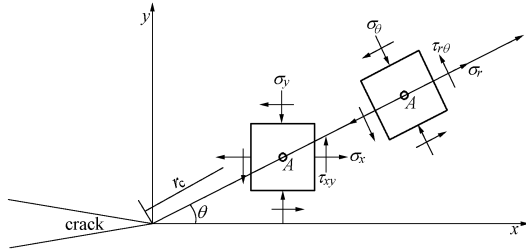


图1 裂纹尖端应力场

Fig. 1 Stresses at crack tip

对如图2所示的双向受压含倾角为 β 的中心斜裂纹试件, 在 $x - y$ 坐标系中则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma(\cos^2 \beta + k \sin^2 \beta), \\ \sigma_y &= \sigma(\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta), \\ \tau_{xy} &= \sigma(1 - k) \sin \beta \cos \beta. \end{aligned} \right\} (3)$$

MTS 准则认为翼裂纹起裂角 θ 应满足

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0. \quad (4)$$

将式(2)中的第2式代入式(4)可得

$$\cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1)] = 0. \quad (5)$$

当 $\cos \frac{\theta}{2} = 0$ 时, $\theta = \pm\pi$, 此时 $(\tau_{r\theta})_{\theta=\pm\pi} \neq 0$ 。

若设 $\theta = \theta_0$, 满足

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II}(3 \cos \theta_0 - 1) = 0. \quad (6)$$

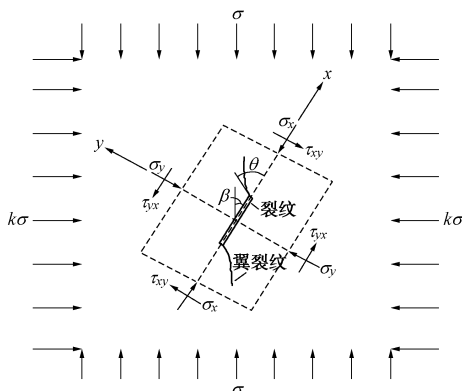


图2 双轴压缩下的倾斜裂纹受力状态

Fig. 2 Stress status of an inclined crack in biaxial compression

目前关于压应力下 K_I 的计算方法有两种不同的认识: ①以李世愚等^[16]为代表的, 认为压应力下裂纹将闭合, 进而导致其对裂纹尖端附近的奇异应力场没有贡献, 即奇异性消失, 同时由于物质的不可侵入性,

认为 K_I 不可能取负值, 而应为 0。同时赵彦琳等^[10]也根据裂纹表面的应力边界条件和 Muskhelishvili 基本理论得到 $K_I=0$ 。把 $K_I=0$ 代入式(6)可得 $\theta_0=70.5^\circ$, 即翼裂纹起裂角恒为 70.5° , 也就是说由传统的 MTS 准则得出的翼裂纹起裂角与裂纹倾角、长度及摩擦系数等物理力学性质均无关系, 显然这是不合理的。Lee 等^[17]的试验结果也表明, 翼裂纹起裂角随着裂纹倾角的增大而增大, 且当裂纹倾角较小或较大时尤为明显, 而中间角度时则差异不大。②不少学者机械地理解裂纹闭合, 并认为此时 $K_I < 0$, 显然这是不合理的。总之, 不考虑 T 应力的传统 MTS 准则不能很好地反映压剪裂纹的起裂机理。

2 考虑 T 应力的岩石压剪 I - II 型复合裂纹扩展准则

由上述分析可知传统断裂力学不适用于压剪状态下的岩石断裂问题, 因此下面根据压剪应力下的岩石裂纹受力特点, 提出考虑 T 应力的压剪应力下岩石 I - II 型复合裂纹的 MTS 准则, 并研究裂纹几何、强度及变形参数对翼裂纹起裂角的影响。

Williams 等^[1]将裂纹尖端的弹性应力场表示为

$$\sigma_{ij} = A_1 r^{-1/2} f_{ij}^1(\theta) + A_2 f_{ij}^2 + A_3 r^{1/2} f_{ij}^3(\theta) + \dots. \quad (7)$$

式中 第一项为奇异应力项, 在裂纹尖端占据主导地位; 第二项为非奇异项, 即常数项, 其与 r 无关; 第三项及后续项为 r 的高阶项, 当 $r \rightarrow 0$ 时可以忽略不计。传统的断裂力学认为在裂纹尖端只需要考虑第一项对应力场的影响, 而第二项可以忽略不计。

而目前研究认为闭合裂纹尖端的应力场应同时包含应力强度因子和 3 个 T 应力分量即 T_x , T_y 和 T_{xy} , 由此可得裂纹尖端的应力场为(对于压剪裂纹, $K_I=0$):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + T_x, \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + T_y, \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + T_{xy}. \end{aligned} \right\} (8)$$

将式(8)转换为极坐标可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi r}} (3 \cos \theta - 1) \sin \frac{\theta}{2} + T_x \cos^2 \theta + T_y \sin^2 \theta + T_{xy} \sin(2\theta), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{3K_{II}}{2\sqrt{2\pi r}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} + T_x \sin^2 \theta + T_y \cos^2 \theta - T_{xy} \sin(2\theta), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (3 \cos \theta - 1) + \frac{1}{2} (T_y - T_x) \sin 2\theta + T_{xy} \cos(2\theta). \end{aligned} \right\} (9)$$

由式(9)可知, 无论采用何种断裂准则, 都将有 T 应力的存在, 它无疑会对翼裂纹的起裂角度、起裂强度及扩展路径等产生影响。Ayatollahi 等^[18]也指出在裂纹尖端附近, 奇异应力项将比 T 应力大很多, 此时 T 应力可以忽略; 然而, 在裂纹起裂的临界裂纹区范围

内, 奇异应力降低, T 应力所占比重自然增大, 此时 T 应力不能再被忽略。

对图 2 所示倾斜裂纹, T 应力则可表示为^[10]

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \sigma(\cos^2 \beta + k \sin^2 \beta), \\ T_y &= \sigma(\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta), \\ T_{xy} &= f\sigma(\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由此可得裂纹尖端的最大主应力为

$$\sigma_1 = (\sigma_\theta)_{\max} = -\frac{3K_{II}}{2\sqrt{2\pi r}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} + T_x \sin^2 \theta + T_y \cos^2 \theta - T_{xy} \sin(2\theta). \quad (11)$$

对于完整岩石, 在如图 2 所示的双轴压缩下, 倾角为 β 的截面上的正应力 σ'_β 和切应力 τ'_β 为

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_\beta &= \sigma(\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta), \\ \tau'_\beta &= \sigma(1-k) \sin \beta \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

而当岩体含一条倾角为 β 、长度为 $2a$ 的裂纹时, 由于裂纹的力学性质远远低于相应的完整岩石, 因此裂纹面上的正应力和切应力将明显受到裂纹的影响。此时裂纹面上的正应力 σ_β 和切应力 τ_β 则为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\beta &= (1-C_n)\sigma(\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta), \\ \tau_\beta &= (1-C_s)\sigma(1-k) \sin \beta \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中, C_n , C_s 分别为裂纹传压及传剪系数^[19], $C_n = \frac{\pi a}{\pi a + \frac{E}{(1-\nu^2)k_n}}$, $C_s = \frac{\pi a}{\pi a + \frac{E}{(1-\nu^2)k_s}}$; 当 $a=0$ cm 时, 即岩石中不含裂纹, 为完整岩石, 那么 $C_n=C_s=0$, 而式 (13) 即为式 (12)。

由图 2 所示的裂纹受力特点, 可得裂纹面上的有效滑移驱动力 τ_{eff} 为

$$\tau_{\text{eff}} = \begin{cases} 0 & (\tau_\beta \leq f\sigma_\beta) \\ \tau_\beta - f\sigma_\beta & (\tau_\beta > f\sigma_\beta) \end{cases}. \quad (14)$$

把式 (14) 代入 II 型裂纹的尖端应力强度因子计算公式, 即 $K_{II} = \tau_{\text{eff}} \sqrt{\pi a}$, 可得

$$K_{II} = \begin{cases} 0 & (\tau_\beta \leq f\sigma_\beta) \\ [\tau_\beta - f\sigma_\beta] \sqrt{\pi a} & (\tau_\beta > f\sigma_\beta) \end{cases}. \quad (15)$$

采用 MTS 准则, 将式 (10), (15) 代入式 (11) 可得

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \begin{cases} \sigma(\cos^2 \beta + k \sin^2 \beta) \sin^2 \theta + \sigma(\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta) \cos^2 \theta - f\sigma(\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta) \sin 2\theta & (\tau_\beta \leq f\sigma_\beta), \\ -\frac{3}{2\sqrt{2\pi r}} [(1-C_s)(1-k) \sin \beta \cos \beta - f(1-C_n) \cdot (\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta)] \sigma \sqrt{\pi a} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + \sigma(\cos^2 \beta + k \sin^2 \beta) \sin^2 \theta + \sigma(\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta) \cos^2 \theta - f\sigma(\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta) \sin 2\theta & (\tau_\beta > f\sigma_\beta). \end{cases} \quad (16)$$

设 $\alpha = \sqrt{2r_c/a}$ 为裂纹尖端相对临界尺寸, 即把式 (16) 代入式 (4) 可得

$$\begin{aligned} (1) \text{ 当 } \tau_\beta \leq f\sigma_\beta \text{ 时,} \\ (1-k) \sin 2\theta \cos 2\beta - 2f \cos 2\theta (\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta) = 0, \\ (1-k) \cos 2\theta \cos 2\beta + 2f \sin 2\theta (\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta) < 0. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ } \tau_\beta > f\sigma_\beta \text{ 时,} \\ \frac{3}{2\alpha} [(1-C_s)(1-k) \sin \beta \cos \beta - f(1-C_n)(\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta)] \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) - (1-k) \sin 2\theta \cos 2\beta + 2f \cos 2\theta (\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta) = 0, \\ \frac{3}{2\alpha} [(1-C_s)(1-k) \sin \beta \cos \beta - f(1-C_n)(\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta)] \cdot \left(\frac{5}{4} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) + 2(1-k) \cos 2\theta \cos 2\beta + 4f \sin 2\theta (\sin^2 \beta + k \cos^2 \beta) < 0. \end{aligned} \quad (18)$$

式中, r_c 为材料的临界裂纹区, 是材料性能参数^[20]。

由式 (18) 可知, 翼裂纹起裂角 θ 不但与岩石的弹性模量 E 、泊松比 ν 有关, 而且还与裂纹尺寸 $2a$ 、倾角 β 、裂纹摩擦系数 f 、裂纹法向及切向刚度 k_n 和 k_s 、裂纹尖端的临界尺寸 r_c 等都有关系。

但是需要注意的是在传统断裂准则中, 由于未考虑裂纹尖端非奇异应力项的影响, 在求解式 (4) 时可将 $r^{-1/2}$ 项消除, 因此 r_c 的大小问题得以回避。但是, 如果在应力分量中考虑了 T 应力的影响, 则 r_c 不能消除。根据 Williams 等的试验结果^[1], 当 $\alpha = 0.1$ 时较为理想。对岩石等材料而言, 其 r_c 一般比金属和有机玻璃等材料更大, 如 Ayatollahi 等^[21]指出大理岩 (意大利)、石灰岩 (沙特阿拉伯)、花岗岩 (韩国) 的 r_c 分别为 0.6, 5.2, 0.8 mm。

3 算例分析

下面采用 Bobet^[22]的试验结果对本文所提出的方法进行验证, 试验所用石膏试件含一条中心预制斜裂纹, 试件受单轴压缩, 其物理力学参数为: $E=5.96$ GPa, $\nu=0.15$, $2a=1.27$ cm, $k=0$, $r_c=0.22$ mm (即 $\alpha=0.26$), 根据经验取其他参数为: $k_n=2$ GPa/cm, $k_s=1$ GPa/cm, $f=0.2$ 。翼裂纹起裂角随裂纹倾角的变化规律如图 3, 可以看出当考虑 T 应力对裂纹扩展的影响时, 翼裂纹起裂角 θ 不再是经典的 70.5° , 而是随着裂纹倾角 β 的增大而增大, 这与 Bobet^[22]的试验结果吻合较好, 尤其是当裂纹倾角小于 45° 时。同时由本文方法所得计算结果可知, 当裂纹倾角为 0° 时, 即裂纹方向与荷载方向平行, 那么此时试件将产生劈裂破坏, 即此

时翼裂纹起裂角为 0° ；而当裂纹倾角为 90° 时，此时裂纹为水平，与荷载方向垂直，那么此时试件将产生近似垂直于裂纹的翼裂纹，此时翼裂纹起裂角计算值为 79.1° ，这在逻辑上也是合理的。因此可以认为考虑 T 应力后的岩石压剪断裂模型能更客观地反映其内在破坏机制。

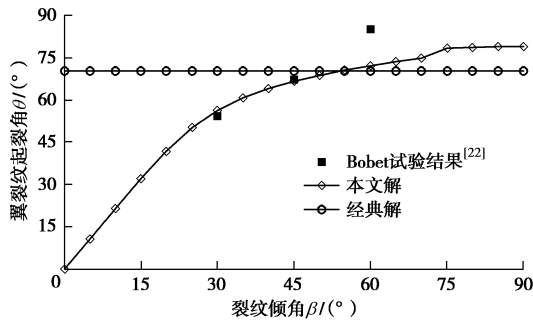


图3 单轴压缩下翼裂纹起裂角 θ 与裂纹倾角 β 的关系

Fig. 3 Relationship between initiation angle θ of wing crack and dip angle β of flaw in uniaxial compression

另外由前述分析可知，翼裂纹起裂角与岩石及裂纹参数等密切相关，因此下面采用参数敏感性分析研究不同参数对翼裂纹起裂角的影响。这里采用单因素参数分析法，即假定当某一参数改变时，其余参数均不变。

(1) α 对翼裂纹起裂角的影响

取 α 分别为0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4，同时仍与Bobet^[22]的试验结果进行对比。由图4的计算结果可知：①首先从曲线的总体变化趋势来看，随着裂纹倾角的增加，翼裂纹起裂角均是先由 0° 迅速增加，而后出现一段相对平稳期，最后又较快地增加。这说明翼裂纹起裂角随裂纹倾角 β 而变化，不是恒为 70.5° 的经典解。从与Bobet^[22]的试验结果对比来看，本文方法的计算结果与试验结果的吻合也更好，说明本文所建立的模型是比较合理的。②其次，从翼裂纹起裂角随 α 的变化来看，当 α 较小时，曲线基本呈三段变化，即首先翼裂纹起裂角由 0° 迅速增加到 70.5° 左右，而后又逐渐增加到 79° 附近。由 α 的物理意义可知，当 α 较大，裂纹尖端临界尺寸则相对较大，即裂纹尖端塑性变形明显，此时翼裂纹起裂角则受裂纹倾角影响较大。相反，对于脆性破坏特征明显的材料而言，其裂纹尖端塑性区较小，即 α 较小，相应地翼裂纹起裂角也更趋于经典解，这从另一方面说明经典解更适用于脆性材料的破坏。

(2) 岩石弹性模量 E 对翼裂纹起裂角的影响

取 E 分别为1, 5, 10, 15 GPa，同时仍与Bobet^[22]的试验结果进行对比。由图5所示计算结果可知：①从曲线的总体变化趋势来看，随着岩石弹性模量 E 的增加，翼裂纹起裂角均是先由 0° 较平稳地增加到

79.1° 。这也说明翼裂纹起裂角是随裂纹倾角 β 而变化，且当 $E \geq 5$ GPa时，理论计算结果与Bobet^[22]的试验结果吻合较好。②其次，从翼裂纹起裂角随岩石弹性模量 E 的变化来看，当 E 较小时，翼裂纹起裂角较小，且与试验结果偏差较大，而 E 增加到一定程度后，如在本算例中当 $E \geq 5$ GPa时，其对翼裂纹起裂角的影响几乎可以忽略不计。这说明当岩石弹性模量达到一定程度后，其对翼裂纹起裂角的影响较小。

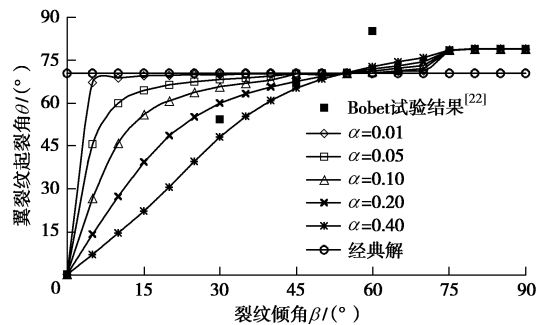


图4 α 对单轴压缩下翼裂纹起裂角 θ 的影响

Fig. 4 Effects of α on initiation angle θ of wing crack in uniaxial compression

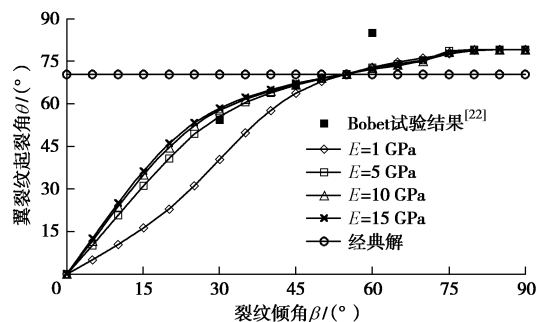


图5 E 对单轴压缩下翼裂纹起裂角 θ 的影响

Fig. 5 Effects of E on initiation angle θ of wing crack in uniaxial compression

(3) 摩擦系数 f 对翼裂纹起裂角的影响

取 f 分别为0.1, 0.2, 0.3, 0.4，同时仍与Bobet^[22]的试验结果进行对比。由图6计算结果可知：①从曲线的总体变化趋势来看，随着裂纹面摩擦系数的增加，翼裂纹起裂角均是先由 0° 较平稳地增加到 80° 左右。这也说明翼裂纹起裂角是随裂纹倾角 β 而变化，且理论计算结果与Bobet^[22]的试验结果吻合较好。②从翼裂纹起裂角随裂纹面摩擦系数的变化来看，当裂纹倾角 $\beta \leq 45^\circ$ 时，翼裂纹起裂角随裂纹面摩擦系数的变化很小，且与试验结果误差较小；而 $\beta \geq 45^\circ$ 时，随着裂纹面摩擦系数的增加，翼裂纹起裂角越来越大，且与试验结果的吻合也越好。这是因为当裂纹面摩擦系数增加到一定程度后，沿裂纹面的下滑力将小于其摩擦力，因而将不会发生剪切滑移，此时 K_I, K_{II} 均为0，岩石将发生张拉破坏。

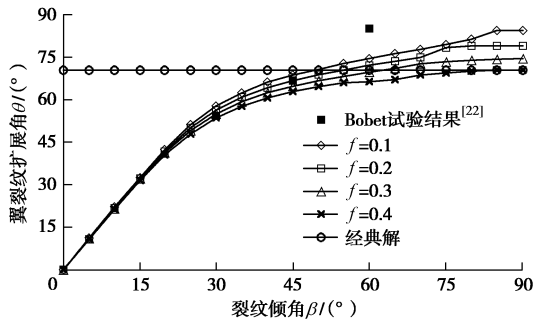


图 6 f 对单轴压缩下翼裂纹起裂角 θ 的影响

Fig. 6 Effects of f on initiation angle θ of wing crack in uniaxial compression

(4) 法向刚度 k_n 及切向刚度 k_s 对翼裂纹起裂角的影响

分别取 k_n 为 0.2, 2, 20 GPa/cm, k_s 为 0.1, 1, 10 GPa/cm, 同时仍与 Bobet^[22] 的试验结果进行对比。由图 7, 8 计算结果可知: ①首先, 由图 7 可以看出, 从曲线的总体变化趋势来看, 随着裂纹面法向刚度的增加, 翼裂纹起裂角均是先由 0° 较平稳地增加到约 80° , 且与 Bobet^[22] 的试验结果吻合较好。这与上述几种情况的变化规律类似。且随着裂纹面法向刚度的增加, 翼裂纹起裂角的变化幅度并不是很明显, 这说明随着裂纹面法向刚度对翼裂纹起裂角的影响并不大。②其次, 由图 8 可以看出, 当裂纹面法向刚度较小时, 翼裂纹起裂角随着裂纹倾角的变化规律的理论计算结果与试验结果吻合较好, 而当裂纹倾角增加到一定程度时, 如当 $k_s=10$ GPa/cm 时, 翼裂纹起裂角的变化幅度较大, 且与试验结果的误差也较大。因此, 可以认为裂纹面切向刚度对翼裂纹起裂角的影响更大。这主要是因为, 在压剪应力下, 倾斜裂纹面上的切应力对其滑移破坏影响更大, 而切应力则受裂纹面切向刚度的影响更为严重。

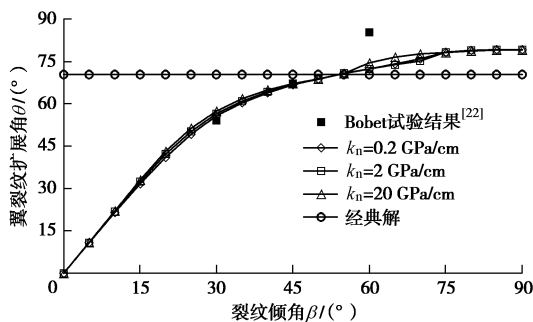


图 7 k_n 对单轴压缩下翼裂纹起裂角 θ 的影响

Fig. 7 Effects of k_n on initiation angle θ of wing crack in uniaxial compression

(5) 侧压系数 k 对翼裂纹起裂角的影响

取 k 分别为 0/0.1/0.2/0.3, 同时仍与 Bobet^[22] 的试验结果进行对比。由图 9 计算结果可知: ①首先从曲线的总体变化趋势来看, 随着侧压系数的增加, 翼裂纹起裂角均是先由 0° 较平稳地增加到约 80° , 且与

Bobet^[22] 的试验结果吻合较好。当裂纹倾角较小时, 其与试验结果的吻合较好, 这与上述几种情况的变化规律类似。②其次从曲线的总体变化幅度来看, 当 k 由 0 增加到 0.3 时, 曲线总体变化幅度较小, 这说明 k 对翼裂纹起裂角的影响不是很显著。

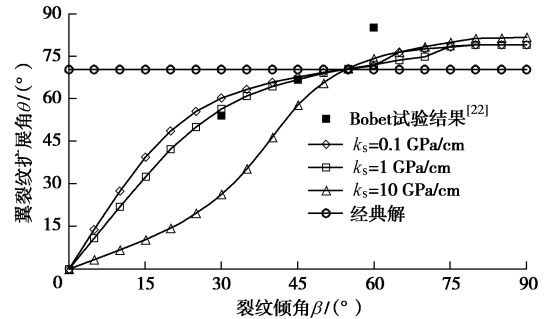


图 8 k_s 对单轴压缩下翼裂纹起裂角 θ 的影响

Fig. 8 Effects of k_s on initiation angle θ of wing crack in uniaxial compression

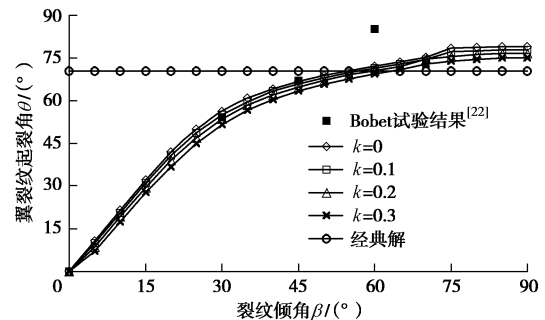


图 9 k 对单轴压缩下翼裂纹起裂角 θ 的影响

Fig. 9 Effects of k on initiation angle θ of wing crack in uniaxial compression

4 结 论

(1) 针对传统断裂理论未能考虑裂纹尖端非奇异应力项即 T 应力的不足, 提出了考虑 T 应力的修正 MTS 准则。同时结合压剪应力下的裂纹受力特点, 在上述准则中还引入了裂纹面法向及切向刚度。最终建立了能够同时考虑岩石参数及裂纹几何参数 (如裂纹倾角、长度等)、强度参数 (裂纹面摩擦系数) 及变形参数 (裂纹面法向及切向刚度) 的 MTS 准则, 更客观地反映了岩石压剪裂纹起裂机理。

(2) 算例表明由本文方法计算得到的翼裂纹起裂角与试验结果吻合较好, 这说明压剪应力下的翼裂纹起裂角同时受到岩石及裂纹参数和外力的共同影响, 而不是恒为 70.5° 的经典解。

(3) 通过参数敏感性分析发现 α 对翼裂纹起裂角的影响最大。其次, 岩石弹性模量及裂纹面切向刚度对翼裂纹起裂角的影响次之。而裂纹面法向刚度、裂纹面摩擦系数、侧压系数等对翼裂纹起裂角的影响最小。

参考文献:

- [1] WILLIAMS J G, EWING P D. Fracture in complex stress: the angled crack problem[J]. International Journal of Fracture, 1972, **8**(4): 416 - 441.
- [2] GUPTA M, ALDERLIESTEN R C, BENEDICTUS R. A review of T -stress and its effects in fracture mechanics[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2015, **134**: 218 - 241.
- [3] 唐世斌, 黄润秋, 唐春安. T 应力对岩石裂纹扩展路径及起裂强度的影响研究[J]. 岩土力学, 2016, **37**(6): 1521 - 1529, 1549. (TANG Shi-bin, HUANG Run-qiu, TANG Chun-an. Effect of T -stress on crack growth path in rock and fracture strength[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, **37**(6): 1521 - 1529, 1549. (in Chinese))
- [4] WILLIAMS M L, CALIF P. On the stress distribution at the base of a stationary crack[J]. Journal of Applied Mechanics, 1957, **24**(1): 109 - 114.
- [5] CHRISTOPHER C J, JAMES M N, PATTERSON E A, et al. A quantitative evaluation of fatigue crack shielding forces using photoelasticity[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, **75**(14): 4190 - 4199.
- [6] COLOMBO C, DU Y, JAMES M N, et al. On crack tip shielding due to plasticity-induced closure during an overload[J]. Fatigue Fracture Engineering Material Structure, 2010, **33**(12): 766 - 777.
- [7] MATVIENKO Y G. Maximum average tangential stress criterion for prediction of the crack path[J]. International Journal of Fracture, 2012, **176**(1): 113 - 118.
- [8] SMITH D J, AYATOLLAHI M R, PAVIER M J. The role of T -stress in brittle fracture for linear elastic materials in mixed-mode loading[J]. Fatigue Fracture Engineering Material Structure, 2001, **24**(2): 137 - 150.
- [9] LI X F, LIU G L, LEE K Y. Effects of T -stresses on fracture initiation for a closed crack in compression with frictional crack faces[J]. International Journal of Fracture, 2009, **160**(1): 19 - 30.
- [10] 赵彦琳, 范勇, 朱哲明, 等. T 应力对闭合裂纹断裂行为的理论和实验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, **37**(6): 1340 - 1349. (ZHAO Yan-lin, FAN Yong, ZHU Zhe-ming, et al. Analytical and experimental study on the effect of T -stress on behavior of closed cracks[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, **37**(6): 1340 - 1349. (in Chinese))
- [11] FINNIE I, SAITH A. A note on the angled crack problem and the directional stability of cracks[J]. International Journal of Fracture, 1973, **9**(4): 484 - 486.
- [12] SMITH D J, AYATOLLAHI M R, PAVIER M J. The role of T -stress in brittle fracture for linear elastic materials in mixed-mode loading[J]. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 2001, **24**: 137 - 150.
- [13] RASHIDI M M, AYATOLLAHI M R, BERTO F. Rock fracture toughness in mode II loading: a theoretical model based on local strain energy density[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2018, **51**: 243 - 253.
- [14] 唐世斌, 黄润秋, 唐春安, 等. 考虑 T 应力的最大周向应变断裂准则研究[J]. 土木工程学报, 2016, **49**(9): 87 - 95. (TANG Shi-bin, HUANG Run-qiu, TANG Chun-an, et al. Study on fracture criterion based on the maximum tangential strain considering the T -stress[J]. China Civil Engineering Journal, 2016, **49**(9): 87 - 95. (in Chinese))
- [15] PRUDENCIO M, van SINT J M. Strength and failure modes of rock mass models with non-persistent joints[J]. International Journal of Rock mechanics & Mining Sciences, 2007, **46**(6): 890 - 902.
- [16] 李世愚, 和泰名, 尹祥础. 岩石断裂力学导论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010. (LI Shi-yu, HE Tai-ming, YIN Xiang-chu. Introduction of rock fracture mechanics[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2010. (in Chinese))
- [17] LEE H, JEON S. An experimental and numerical study of fracture coalescence in pre-cracked specimens in uniaxial compression[J]. International Journal of Solids and Structures, 2011, **48**: 979 - 999.
- [18] AYATOLLAHI M R, ALIHA M R M. On the use of Brazilian disc specimen for calculating mixed mode I-II fracture toughness of rock materials[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, **75**: 4631 - 4641.
- [19] LIU T Y, CAO P, LIN H. Damage and fracture evolution of hydraulic fracturing in compression-shear rock cracks[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2014, **74**: 55 - 63.
- [20] WILLIAMS M L, CALIF P. On the stress distribution at the base of a stationary crack[J]. Journal of Applied Mechanics, 1957, **24**(1): 109 - 114.
- [21] AYATOLLAHI M R, ALIHA M R M. On the use of Brazilian disc specimen for calculating mixed mode I - II fracture toughness of rock materials[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, **75**: 4631 - 4641.
- [22] BOBET A. The initiation of secondary cracks in compression[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2000, **66**: 187 - 219.