

DOI: 10.11779/CJGE201811010

基于广义耦合马尔可夫链的地层变异性模拟方法

邓志平^{1, 2, 3}, 李典庆^{*1, 3}, 祁小辉^{1, 3}, 曹子君^{1, 3}

(1. 武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 南昌工程学院水利与生态工程学院, 江西 南昌 330099;

3. 武汉大学工程风险与防灾研究所, 湖北 武汉 430072)

摘要: 传统的广义耦合马尔可夫链模型是地层变异性模拟一种有效的工具。然而, 由于岩土工程地质勘探过程中钻孔分布的稀疏性, 广义耦合马尔可夫链水平方向转移概率矩阵不能直接估计, 传统的广义耦合马尔可夫链模型不能直接用于地层变异性模拟。为此, 提出了基于钻孔资料广义耦合马尔可夫链水平两方向转移概率矩阵的极大似然估计方法, 验证了该方法的有效性, 在此基础上采用信息熵图量化地层变异性。以爱尔兰地区都柏林市丹拉海尔港口处的一组钻孔资料为例进行地层变异性模拟, 分析了钻孔布置方案对水平方向转移概率矩阵估计的影响, 探讨了钻孔布置方案对地层变异性模拟的影响规律。结果表明: 提出的水平方向转移概率矩阵极大似然估计方法能够有效地估计水平方向转移概率矩阵, 从而为基于钻孔资料的地层不确定性分析奠定了基础。钻孔布置方案对各方向上转移概率矩阵的估计和地层变异性的模拟结果都十分重要, 为获得准确的转移概率矩阵应提供足够的钻孔数据。钻孔位置对地层变异性模拟有明显的影响, 应将钻孔布置于重点研究区域, 尽量减少地层模拟不确定性。信息熵图能够直观地量化地层模拟的不确定性, 可用于指导钻孔方案的布置。

关键词: 地层变异性; 广义耦合马尔可夫链; 水平转移概率矩阵; 信息熵图

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2018)11-2041-10

作者简介: 邓志平(1990-), 男, 江西南昌人, 博士, 讲师, 主要从事岩土工程可靠度分析与风险控制方面的研究。

E-mail: zhipingdeng10@126.com。

Simulation of geological uncertainty using modified generalized coupled Markov chain

DENG Zhi-ping^{1, 2, 3}, LI Dian-qing^{*1, 3}, QI Xiao-hui^{1, 3}, CAO Zi-jun^{1, 3}

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 2. School

of Water Resources and Ecological Engineering, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China; 3. Institute of Engineering

Risk and Disaster Prevention, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: The traditional generalized coupled Markov chain (GCMC) is an effective model for the simulation of geological uncertainty. However, it cannot be directly applied to geotechnical problems. The reason lies in that one important parameter of GCMC, namely horizontal transition probability matrix (HTPM), is hard to be estimated due to the typical large distance between boreholes. Hence, In the framework of GCMC, a maximum likelihood estimation method for HTPMs based on borehole data is proposed. The validity of the method is verified. On this basis, the information entropy plot is adopted herein to quantify geological uncertainty. In addition, the borehole data from Dun Laoghaire Harbour, Dublin City, Ireland is used to simulate the geological uncertainty. The influences of layout schemes of boreholes on HTPMs are investigated. Moreover, those on simulation of geological uncertainty are explored. The results show that the proposed method can effectively estimate HTPM, which lays a foundation for analysis of geological uncertainty based on borehole data. The layout scheme of boreholes is very important for the estimation of the transition probability matrix in all directions and the simulated results of the geological uncertainty. Adequate borehole data should be provided to obtain accurate transition probability matrices. The boreholes should be designed in the key research area to minimize the simulation of geological uncertainty. The information entropy plot can visually quantify the stratigraphic simulation uncertainty, which can be used to guide the design of borehole schemes.

Key words: geological uncertainty; generalized coupled Markov chain; horizontal transition probability matrix; information entropy

基金项目: 国家自然科学基金项目(51579190, 51528901, 51779189)

收稿日期: 2017-09-24

*通讯作者(E-mail: dianqing@whu.edu.cn)

0 引言

地层变异性（即地层分布的不确定性）广泛存在于岩土结构物（如边坡或隧道）中^[1-5]，其变异性程度往往决定了工程的成本、设计和施工所采用的方法。该变异性的模拟是大多岩土结构物变形与稳定分析的重要前提^[6]。传统的方法往往根据钻孔数据凭借工程师的经验对地层情况进行划分，或根据已知钻孔数据采用简单插值技术得到未知信息处的地层分布情况，这些方法较为简便但忽略了地层分布的不确定性。近年来，部分学者们提出了多种概率方法用于地层识别，如 Liao 等^[7]提出了一种基于孔压静力触探数据的三维聚类分析方法；Cao 等^[8]提出了基于静力触探试验数据的贝叶斯方法；Ching 等^[9]提出了基于静力触探试验数据的一种小波变换模量最大值法。但这些方法主要研究单个钻孔内地层分布情况，钻孔之间的地层分布依然难以预测。另一部分学者提出了基于边界模型的地层变异性模拟方法，并得到一定程度的应用^[10-15]，该模型将地层边界深度视为随机变量或随机场，根据已知钻孔位置处的边界深度通过模拟得到未知样本位置处的边界深度。该模型理论简单，能够结合工程经验进行判断，适用于边界较为明显的地层，但并不适用于复杂的地层分布情况，尤其是对于一种土体在另一种较为均匀的土体中的不规则分布情况。幸运的是耦合马尔可夫链的提出为这种复杂的情况提供了一种有效的途径^[16]。耦合马尔可夫链方法中关键的一步是求解水平方向转移概率矩阵，为了解决该问题，祁小辉等^[17]基于耦合马尔可夫链模型提出了利用钻孔资料估计水平方向转移概率矩阵的方法，然而，该方法受到耦合马尔可夫链模型本身缺点的限制，例如该模型模拟顺序必须遵循逐行从左至右，模拟结果存在一定人为的倾向性^[18]，当条件钻孔分布较稀疏时，这种人为的倾向性将更加明显^[19]。为了解决该问题，Park 等^[20]对耦合马尔可夫链进行了改进，采用随机模拟顺序。由于实际地层分布往往表现为方向非平稳性，采用各方向基于同一个转移概率矩阵的耦合马尔可夫链模型并不能有效地表征这种方向非平稳性。为此，Park^[21]进一步提出了广义耦合马尔可夫链模型，并将该方法应用于地质图模拟问题，该模型中的水平两方向转移概率矩阵也难以直接估计，Park^[21]提出利用样本点信息，采用最近邻域法通过插值得到未知单元处的土体状态，据此得到研究区域的训练图，根据该图统计计算出水平方向转移概率矩阵。该方法虽然可以求出水平方向转移概率矩阵，但其主要缺点是需要大量的样本点信息。实际岩土工程勘探过程中受技术经济条件限制，钻孔数据往往较少，提供的信息不足以较准确地估计水平方向转移概率矩阵，亟需研究水平

方向转移概率矩阵新的估计方法，进而才能实现地层变异性的准确模拟。

本文提出基于钻孔资料的极大似然估计方法用于评估广义耦合马尔可夫链中水平两方向转移概率矩阵，并对所提方法的有效性进行了验证。以爱尔兰地区一组钻孔资料为例估计地层各方向的转移概率矩阵，研究了钻孔布置方案对水平转移概率矩阵估计的影响，探讨了钻孔布置方案对地层变异性模拟的影响规律，采用信息熵量化地层变异性模拟的不确定性。

1 广义耦合马尔可夫链模型

广义耦合马尔可夫链模型是在传统耦合马尔可夫链模型^[16]的基础上发展而来，该模型有效地克服了传统模型的缺点，不仅能够考虑各方向上的非平稳性，而且计算效率高，能够有效地模拟多种类型土体的随机分布^[21]。为便于读者理解，简要介绍该模型基本理论。

广义耦合马尔可夫链的转移方式是从未知状态的单元转移至已知状态的单元。在一维空间中，对于待估计单元 Z_1 ，假定其状态为 S_i ，转移至已知状态为 S_j 的单元 Z_2 处的概率，Park^[21]将该概率定义为转移似然函数 $\pi_i(S_j)$ 。根据贝叶斯定理，转移似然函数 $\pi_i(S_j)$ 可由以下公式计算^[21]：

$$\pi_i(S_j) = P(Z_2 = S_j | Z_1 = S_i) = \frac{P(Z_1 = S_i, Z_2 = S_j)}{P'(Z_1 = S_i)} \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$

式中 n 为总的状态数目；标准化常数 $P'(Z_1 = S_i)$ 为单元 Z_1 出现状态 S_i 的先验概率，该概率可由前一阶段各状态的比值确定，在计算过程中不断更新。为了考虑方向非平稳性，似然函数表示为两个子方向转移概率的形式，对式（1）的分子部分进行几何平均，可表示为

$$\pi_i(S_j) = \frac{\sqrt{P(Z_2 = S_j | Z_1 = S_i)P(Z_1 = S_i)}}{P'(Z_1 = S_i)} = \sqrt{P(Z_1 = S_i | Z_2 = S_j)P(Z_2 = S_j)} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

式中 沿方向 1 和反方向 2 的 r 步转移概率可分别表示为

$${}^1\mathbf{P}^{(r)} = \begin{bmatrix} {}^1p_{11}^{(r)} & {}^1p_{12}^{(r)} & \cdots & {}^1p_{1n}^{(r)} \\ {}^1p_{21}^{(r)} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}^1p_{n1}^{(r)} & \cdots & \cdots & {}^1p_{nm}^{(r)} \end{bmatrix},$$

$${}^2\mathbf{P}^{(r)} = \begin{bmatrix} {}^2p_{11}^{(r)} & {}^2p_{12}^{(r)} & \cdots & {}^2p_{1n}^{(r)} \\ {}^2p_{21}^{(r)} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}^2p_{n1}^{(r)} & \cdots & \cdots & {}^2p_{nm}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

在上述矩阵中，左上标表示向前（子方向 1）和向后（子方向 2）转移，右上标 r 表示转移步数，其中 ${}^1\mathbf{P}^{(r)} = \prod_{n=1}^r {}^1\mathbf{P}$ ， ${}^2\mathbf{P}^{(r)} = \prod_{n=1}^r {}^2\mathbf{P}$ 。将式（3）中的转移概率

矩阵带入至式 (2) 中可得

$$\pi_i(S_j) = \frac{\sqrt{{}^1p_{ji}^{(d1)} \cdot {}^2p_{ij}^{(d1)} \cdot m_i \cdot m_j}}{m'_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4)$$

式中 ${}^1p_{ji}^{(d1)}$, ${}^2p_{ij}^{(d1)}$ 分别为 $d1$ 步转移概率矩阵中 (j, i) 和 (i, j) 处的单元; m_i , m_j 分别为状态 S_i 和 S_j 的边缘分布; m'_i 为计算过程中间阶段状态 S_i 所占的比例。

对于二维情况, 存在 4 个子方向, 其中假定各子方向的马尔可夫链相互独立, 其条件概率表示为^[17]

$$\pi_i(S_j) = \frac{\prod_{k=1}^4 \sqrt{{}^k p_{ki}^{(dk)} \cdot {}^{k*} p_{ik}^{(dk)} \cdot m_i \cdot m_{S(k)}}}{\sum_{l=1}^n \prod_{k=1}^4 \sqrt{{}^k p_{kl}^{(dk)} \cdot {}^{k*} p_{lk}^{(dk)} \cdot m_l \cdot m_{S(k)}}} \quad (i=1, \dots, n), \quad (5)$$

式中, k^* 为 k 的互补指标 (即, $k \rightarrow k^*: 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3$)。同样, $m_{S(k)}$ 表示在 k 子方向对应状态的边缘分布; 分母为校正系数, 确保 π_i 的和为 1。

2 各方向转移概率矩阵的估计方法

在进行地层变异模拟前, 首先需求出广义耦合马尔可夫链模型中 4 个方向上的转移概率矩阵, 其包括竖直两方向 (竖直向下和向上) 和水平两方向 (水平向左和向右) 转移概率矩阵, 本节将讨论如何估计各方向转移概率矩阵。

2.1 竖直两方向转移概率矩阵估计的统计方法

由于竖直方向具有连续的样本信息, 竖直两方向转移概率矩阵可根据钻孔资料由统计方法直接估计得到^[21], 竖直向下和向上的转移概率 ${}^1p_{rk}^v$, ${}^2p_{rk}^v$ 可由以下公式分别进行计算:

$$\left. \begin{aligned} {}^1p_{rk}^v &= \frac{{}^1T_{rk}^v}{\sum_{f=1}^m {}^1T_{rf}^v}, \\ {}^2p_{rk}^v &= \frac{{}^2T_{rk}^v}{\sum_{f=1}^m {}^2T_{rf}^v}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中, ${}^1T_{rk}^v$, ${}^2T_{rk}^v$ 分别为竖直方向上某一状态 S_r 向下和向上转移到状态 S_k 的转移数目。

2.2 水平两方向转移概率矩阵确定的极大似然估计方法

实际地质勘探中钻孔空间分布的稀疏性导致水平方向没有连续的样本信息, 因而该转移概率矩阵无法通过统计方法直接估计^[23]。为此, 本节在广义耦合马尔可夫链基础上, 提出了间接估计水平两方向转移概率矩阵的极大似然估计方法。根据 Walther 相序定律的假设^[18], 水平方向上的转移过程与竖直向下方向上保持一致, 但规模要大于竖直向下方向。这意味着, 水平向右和向左转移计数矩阵 ${}^1T^h$, ${}^2T^h$ 与竖直向下转

移计数矩阵 ${}^1T^v$ 满足以下关系:

$$\left. \begin{aligned} {}^1T^h &= \begin{bmatrix} K_1 \cdot {}^1T_{1,1}^v & {}^1T_{1,2}^v & \cdots & {}^1T_{1,m-1}^v & {}^1T_{1,m}^v \\ {}^1T_{2,1}^v & K_1 \cdot {}^1T_{2,2}^v & \cdots & {}^1T_{2,m-1}^v & {}^1T_{2,m}^v \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ {}^1T_{m-1,1}^v & {}^1T_{m-1,2}^v & \cdots & K_1 \cdot {}^1T_{m-1,m-1}^v & {}^1T_{m-1,m}^v \\ {}^1T_{m,1}^v & {}^1T_{m,2}^v & \cdots & {}^1T_{m,m-1}^v & K_1 \cdot {}^1T_{m,m}^v \end{bmatrix}, \\ {}^2T^h &= \begin{bmatrix} K_2 \cdot {}^1T_{1,1}^v & {}^1T_{1,2}^v & \cdots & {}^1T_{1,m-1}^v & {}^1T_{1,m}^v \\ {}^1T_{2,1}^v & K_2 \cdot {}^1T_{2,2}^v & \cdots & {}^1T_{2,m-1}^v & {}^1T_{2,m}^v \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ {}^1T_{m-1,1}^v & {}^1T_{m-1,2}^v & \cdots & K_2 \cdot {}^1T_{m-1,m-1}^v & {}^1T_{m-1,m}^v \\ {}^1T_{m,1}^v & {}^1T_{m,2}^v & \cdots & {}^1T_{m,m-1}^v & K_2 \cdot {}^1T_{m,m}^v \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由式 (7) 可得到水平两方向转移概率矩阵:

$$\left. \begin{aligned} {}^1p_{rk}^h &= \frac{{}^1T_{rk}^h}{\sum_{f=1}^m {}^1T_{rf}^h}, \\ {}^2p_{rk}^h &= \frac{{}^2T_{rk}^h}{\sum_{f=1}^m {}^2T_{rf}^h}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

可以看出, 确定水平转移概率矩阵的关键在于确定参数 K_1 和 K_2 , 本文提出基于钻孔数据的极大似然估计方法估计水平两方向转移概率矩阵。如图 1 所示, 假设共有 N_b 个钻孔数据, 选取 N_c 个钻孔作为条件信息, 剩余钻孔视为观测信息。需要指出的是, 为了有效地估计观测钻孔处单元土体状态, 观测钻孔应依次布置在条件钻孔之间。给定参数 K_1 、 K_2 的情况下观测钻孔位置处出现观测信息状态中土体类型 S 的似然函数可表示为

$$L(S | K_1, K_2) = P(S_{i1}, S_{i2} \cdots S_{iN_z}, S_{k1}, S_{k2} \cdots S_{kN_z} | S_{i1}, S_{i2} \cdots S_{iN_z} | \text{Data}_{CI}, K_1, K_2) \quad (9)$$

式中 等式右边为给定条件信息和参数 K_1, K_2 的情况下观测钻孔位置处出现 S 的联合概率; 其中观测信息状态中土体类型 S 包含了 $[S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{iN_z}]$, $[S_{k1}, S_{k2}, \dots, S_{kN_z}]$ 和 $[S_{l1}, S_{l2}, \dots, S_{lN_z}]$ 它们分别为观测钻孔位置处 (如图中第 i, k, l 列) 各单元对应的土体状态; Data_{CI} 为条件信息, 即条件钻孔位置处对应的土体状态。由于各观测钻孔之间存在条件钻孔, 根据马尔可夫性, 观测钻孔中的土体状态仅与其较近的条件钻孔内的信息有关, 因此不同观测钻孔之间对应的土体状态相互独立, 但同一观测钻孔内的各土体状态具有相关性。则似然函数 $L(S | K_1, K_2)$ 可表示为

$$L(S | K_1, K_2) = \prod_{\xi} P(S_{\xi,1}, S_{\xi,2}, \dots, S_{\xi,N_z} | \text{Data}_{CI}, K_1, K_2), \quad (10)$$

式中, ξ 为观测钻孔位置所在列 (如图 1 中第 i, k, l 列), 再由条件概率公式, 式 (10) 可进一步表示为式 (11), 根据马尔可夫链性质, 即当前单元的状态只和距离最近的单元状态有关, 经过推导可得式 (12)

$$L(\mathbf{S} | K_1, K_2) =$$

$$\prod_{\xi} [P(S_{\xi,1} | \text{Data}_{\text{Cl}}, K_1, K_2) \cdot P(S_{\xi,2} | S_{\xi,1}, \text{Data}_{\text{Cl}}, K_1, K_2) \cdot P(S_{\xi,3} | S_{\xi,1}, S_{\xi,2}, \text{Data}_{\text{Cl}}, K_1, K_2) \cdots P(S_{\xi,N_z} | S_{\xi,1}, S_{\xi,2}, \cdots, S_{\xi,N_z-1}, \text{Data}_{\text{Cl}}, K_1, K_2)] \quad (11)$$

$$L(\mathbf{S} | K_1, K_2) =$$

$$\prod_{\xi} [P(S_{\xi,1} | \text{Data}_{\text{Cl}}, K_1, K_2) \cdot P(S_{\xi,2} | S_{\xi,1}, \text{Data}_{\text{Cl}}, K_1, K_2) \cdot P(S_{\xi,3} | S_{\xi,2}, \text{Data}_{\text{Cl}}, K_1, K_2) \cdots P(S_{\xi,N_z} | S_{\xi,N_z-1}, \text{Data}_{\text{Cl}}, K_1, K_2)] \quad (12)$$

理论上式(12)右边各概率存在解析解,但该解析解的计算非常复杂,为此,本文采用蒙特卡罗方法求解。根据条件钻孔数据进行 N_{sim} 次广义耦合马尔可夫链模拟。由模拟结果,统计得到观测钻孔各列的第一个单元出现对应土体状态的次数 $N_{S_{\xi,1}}$,从而可得到 $P(S_{\xi,1} | \text{Data}_{\text{Cl}}, K_1, K_2) = N_{S_{\xi,1}} / N_{\text{sim}}$ 。在观测钻孔所在列的第一个单元出现其对应的土体状态的情况下,统计其所在列第二个单元出现对应的土体状态的次数 $N_{S_{\xi,2}}$,从而得到可得到 $P(S_{\xi,2} | S_{\xi,1}, \text{Data}_{\text{Cl}}, K_1, K_2) = N_{S_{\xi,2}} / N_{\text{sim}}$ 。依次可分别得出式(12)右边各概率的数值解,从而可计算出似然函数 $L(\mathbf{S} | K_1, K_2)$ 。

对于不同的 K_1 和 K_2 值得到不同的 $L(\mathbf{S} | K_1, K_2)$ 值,选择 K_1 和 K_2 值的依据是最大 $L(\mathbf{S} | K_1, K_2)$ 值对应的参数 K_1 和 K_2 认为是最可能的值。 K_1 和 K_2 值的确定可转化为一个优化问题,即 $\max L(\mathbf{S} | K_1, K_2)$, 对此问题可采用优化算法求解,将最大 $L(\mathbf{S} | K_1, K_2)$ 值对应的 K_1 和 K_2 值代入式(7)可得水平方向转移计数矩阵,再由式(8)可得到水平两方向转移概率矩阵。

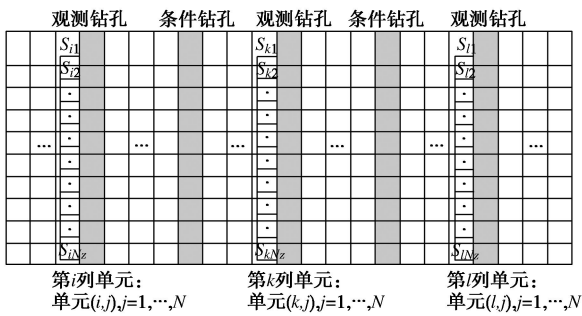


图1 水平方向转移概率矩阵进行估计方案

Fig. 1 Scheme for estimating horizontal transition probability matrix

3 基于信息熵的地层不确定性量化方法

为了对地层不确定性进行量化分析,在此采用信息熵方法^[24]。某个单元不确定性大小可利用信息熵值来衡量,信息熵值越大表示该单元不确定性越大,信息熵值越小表示该单元不确定性越小^[24]。熵值在单元 (i, j) 处的计算公式如下^[24]:

$$H_{ij} = -\sum_{k=1}^m p_{ij}^k \ln(p_{ij}^k) \quad (i=1, \dots, N_x; j=1, \dots, N_z) \quad (13)$$

式中 p_{ij}^k 为单元 (i, j) 处出现状态 k 的概率; N_x , N_y 分别为水平方向和竖直方向单元的个数;求出每个单元对应的信息熵值后,便可绘制熵值分布图。根据

绘制的熵值分布图,可以直观地识别研究区域出现各种土体类型不确定性大小。根据每个单元的熵值,可得到该地层的总信息熵值^[25]:

$$TH = -\frac{1}{N_x \cdot N_z} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_z} H_{ij} \quad (i=1, \dots, N_x; j=1, \dots, N_z) \quad (14)$$

由 TH 的值可对地层不确定性进行总体的量化。

4 基于广义耦合马尔可夫链的地层变异性模拟步骤

基于上述介绍,本文给出了以钻孔数据为条件信息熵的广义耦合马尔可夫链蒙特卡洛模拟具体步骤:

(1) 确定地层剖面范围,选择合适单元尺寸大小对其进行网格划分。

(2) 根据所收集的钻孔数据,采用第2节所给出的方法分别估计各方向上转移概率矩阵。

(3) 检验研究区域钻孔内部土体类型相互转移是否具有马尔可夫性。

(4) 将钻孔和地表的地质信息映射至对应的单元中,作为已知条件信息用于地层变异性模拟。

(5) 产生一个随机模拟顺序,遵循该顺序,逐一模拟出对应单元的土体类型。对于单元 (i, j) , 首先搜索该单元各子方向上已知土体类型的单元,再根据式

(5) 得到该单元状态的条件概率分布 π_f , 同样由该式 $\sum_{f=1}^{k-1} \pi_f < u < \sum_{f=1}^k \pi_f$, $k=2, \dots, n$ 可得到其土体类型 k , 其中 u 为区间 $[0, 1]$ 上产生的均匀分布随机数。从而得到地层变异性一次实现。

(6) 重复步骤5,得到一系列的地层变异性实现,由式(14)计算总信息熵值,当该值收敛时,停止模拟。当模拟次数为 N_{sim} 时,其收敛准则为 $\text{COV}(TH_{t-N_{\text{sim}}}, \dots, TH_t) < 0.5\%$ (t 为第 t 次实现)。

(7) 计算每个单元对应的信息熵值,绘出信息熵图对地层模拟的不确定性进行量化。

5 水平方向转移概率矩阵估计方法有效性验证

为了验证所提方法的有效性,首先假设两组转移概率矩阵(包含了4个方向),以及两个条件钻孔,利用这些信息进行一次地层变异性模拟,将该次地层变

表 1 假定的转移概率矩阵和新估计的转移概率矩阵

Table 1 Assumed and newly estimated transition probability matrices												
土类	(a1) 假定的竖直向下转移概率矩阵 (第 1 组)			(a2) 假定的竖直向上转移概率矩阵 (第 1 组)			(a3) 假定的水平向右转移概率矩阵 (第 1 组)			(a4) 假定的水平向左转移概率矩阵 (第 1 组)		
	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)
1 (砂土)	0.872	0.128	0.000	0.867	0.133	0.000	0.925	0.075	0.000	0.921	0.079	0.000
2 (黏土)	0.102	0.846	0.052	0.108	0.838	0.054	0.061	0.908	0.031	0.065	0.903	0.032
3 (粉土)	0.000	0.175	0.825	0.000	0.182	0.818	0.000	0.105	0.895	0.000	0.110	0.890

土类	(a5) 估计的竖直向下转移概率矩阵 (第 1 组)			(a6) 估计的竖直向上转移概率矩阵 (第 1 组)			(a7) 估计的水平向右转移概率矩阵 (第 1 组)			(a8) 估计的水平向左转移概率矩阵 (第 1 组)		
	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)
1 (砂土)	0.824	0.176	0.000	0.836	0.164	0.000	0.912	0.088	0.000	0.906	0.094	0.000
2 (黏土)	0.121	0.828	0.051	0.130	0.820	0.050	0.061	0.914	0.026	0.075	0.896	0.029
3 (粉土)	0.000	0.227	0.773	0.000	0.227	0.773	0.000	0.118	0.882	0.000	0.134	0.866

土类	(b1) 假定的竖直向下转移概率矩阵 (第 2 组)			(b2) 假定的竖直向上转移概率矩阵 (第 2 组)			(b3) 假定的水平向右转移概率矩阵 (第 2 组)			(b4) 假定的水平向左转移概率矩阵 (第 2 组)		
	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)
1 (砂土)	0.871	0.129	0.000	0.889	0.111	0.000	0.971	0.029	0.000	0.976	0.024	0.000
2 (黏土)	0.057	0.886	0.057	0.108	0.838	0.054	0.013	0.975	0.013	0.025	0.963	0.012
3 (粉土)	0.000	0.167	0.833	0.000	0.167	0.833	0.000	0.039	0.962	0.000	0.039	0.962

土类	(b5) 估计的竖直向下转移概率矩阵 (第 2 组)			(b6) 估计的竖直向上转移概率矩阵 (第 2 组)			(b7) 估计的水平向右转移概率矩阵 (第 2 组)			(b8) 估计的水平向左转移概率矩阵 (第 2 组)		
	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)	1 (砂土)	2 (黏土)	3 (粉土)
1 (砂土)	0.833	0.167	0.000	0.902	0.098	0.000	0.967	0.033	0.000	0.981	0.019	0.000
2 (黏土)	0.063	0.874	0.063	0.110	0.830	0.060	0.012	0.976	0.012	0.023	0.965	0.012
3 (粉土)	0.000	0.177	0.824	0.000	0.177	0.824	0.000	0.035	0.965	0.000	0.037	0.963

异性实现视为“真实地层”。在该次“真实地层”实现的基础上设置虚拟钻孔。采用所提方法根据虚拟钻孔和条件钻孔信息估计新的各方向上转移概率矩阵，再与假定的各方向上转移概率矩阵进行比较，如果两者相近则说明所提估计方法有效。

Qi 等^[22]指出实际地层中竖直方向转移概率矩阵对角占优程度都较高，因而在此假定了两组转移概率情况，见表 1 (a1, a2, a3, a4; b1, b2, b3, b4)，用于研究该方法在不同程度的地层变异性情况下的有效性，其中第 2 组中的水平方向转移概率矩阵对角占优程度高于第 1 组，该研究区域包含了 3 种土体类型（即砂土、黏土和粉土）。根据每组假定的转移概率矩阵以及条件钻孔信息，在此将表层土体类型设置为砂土，利用广义耦合马尔可夫链对地层变异性进行模拟，图 2 给出了以上两组情况所对应的一次地层实现。分别在 x 轴上区间为 $[0, 1.2]$, $[22.8, 24]$, $[46.8, 48]$ 处设置虚拟钻孔。利用第 2 节中所介绍的方法，将虚拟钻孔和条件钻孔所提供的土体类型作为已知信息用于评估新的转移概率矩阵，结果如表 1 (a5, a6, a7, a8; b5, b6, b7, b8) 所示。由表 1 可知，新估计所得的水平两方向上的转移概率矩阵都与原假定的两转移概率矩阵十分接近。例如，第 1 组中估计所得的水平两方向中 ${}^1p_{11}^h$ 和 ${}^2p_{11}^h$ 与原假定的 ${}^1p_{11}^h$ 和 ${}^2p_{11}^h$ 相差分别为 0.013, 0.015。对于第 2 组，其所估计的结果更加接近原假定的转移概率矩阵。例如，第 2 组中估计

的 ${}^1p_{11}^h$ 和 ${}^2p_{11}^h$ 与原假定的 ${}^1p_{11}^h$ 和 ${}^2p_{11}^h$ 相差分别为 0.004, 0.005。这表明本文所提方法能够有效地用于广义耦合马尔可夫链中水平两方向转移概率矩阵的估计。

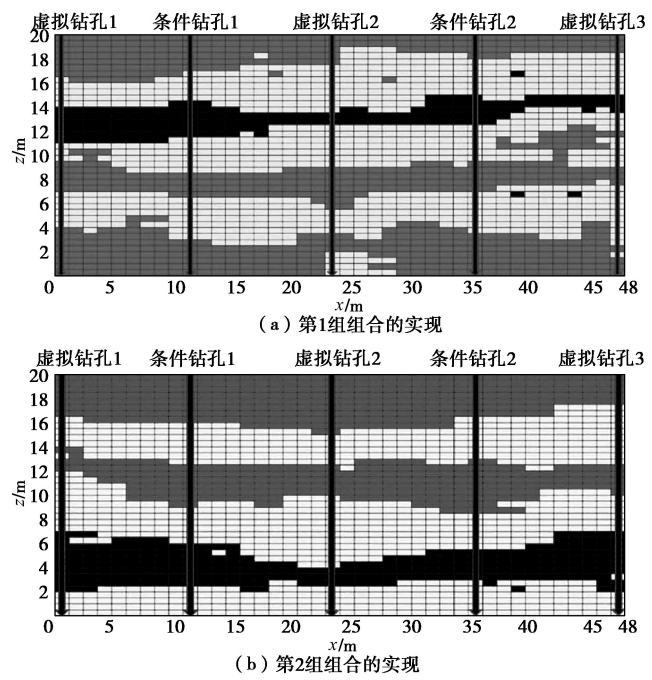


图 2 不同转移概率矩阵组合对应的广义耦合马尔可夫链实现
Fig. 2 Several realizations of GCMC for different combinations of transition probability matrix

表 2 竖直方向转移概率矩阵

Table 2 Vertical transition probability matrices							
土类	竖直向下			土体状态	竖直向上		
	1 (砂砾)	2 (砂土)	3 (砂砾)		1 (砂砾)	2 (砂土)	3 (砂砾)
1 (黏土)	0.937	0.030	0.033	1 (黏土)	0.937	0.030	0.033
2 (砂土)	0.056	0.944	0.000	2 (砂土)	0.056	0.944	0.000
3 (砂砾)	0.088	0.000	0.912	3 (砂砾)	0.088	0.000	0.912

6 算例分析

6.1 钻孔数据

本文收集了爱尔兰地区都柏林市丹拉海尔港口处的一组钻孔资料，钻孔的相对位置如图 3 (a) 所示，图 3 (b) 给出了各钻孔所反应的地层信息，图中 x 轴为钻孔的相对位置， z 轴为钻孔深度。为简便起见，将这些钻孔重新编号为钻孔 1、2、3、4、5。由图可知，该地层主要包含了 3 种土体类型（黏土、砂土、砂砾），且各种土体类型相互嵌套，并呈现出一定的变异性。本节将利用该研究区域内收集的 5 个钻孔信息进行地层变异性分析。

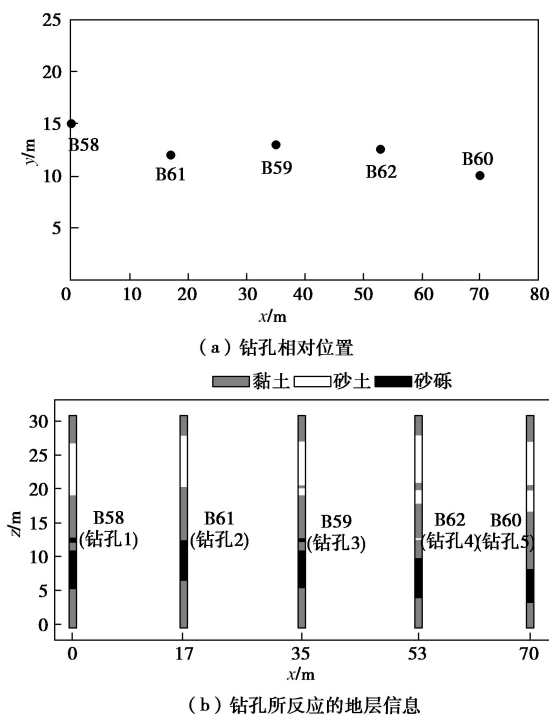


图 3 用于分析的爱尔兰钻孔相对位置及其反映的地层信息
Fig. 3 Relative location and soil strata of boreholes in Ireland used for analysis

在对该区域进行地层变异性模拟前，首先对该区域进行网格划分，单元大小选为为 $1.2\text{ m}\times0.3\text{ m}$ ，广义耦合马尔可夫链模型大小为 $70.8\text{ m}\times31.2\text{ m}$ 。根据已收集的 5 个钻孔资料，由式 (6) 可得竖直向下和向上转移概率矩阵，见表 2。由表 2 可知，此处向下和向上转移概率矩阵保持一致，说明该研究区域竖直向

下和竖直向上转移保持平稳。接着需检验钻孔内部土体类型相互转移是否具有马尔可夫性，根据 Qi 等^[25]所给公式计算马尔可夫性检验不同原假设和备选假设对应的统计量值，计算结果见表 3，由表可知， ${}_0\eta_q$ ($q=1, 2, 3$) 的值都大于 5% 显著性水平对应的临界值，而 ${}_k\eta_q$ ($q=1, 2, 3; k<q\leq3$) 的值都小于 5% 显著性水平对应的临界值。由此可知，零阶马尔可夫链不能用于描述该地区土体类型转移，而一、二阶马尔可夫链则可被接受。因此，接下来需要判断一阶、二阶马尔可夫链哪个最优。当所采用的马尔可夫链最高阶数为 3 时，该地区竖直方向一阶、二阶马尔可夫链对应的损失函数值分别为 -73.36 和 -69.04，可见，一阶马尔可夫链是该区域土体类型转移的最可能马尔可夫链。表明广义耦合马尔可夫链模型适用于该地区地层变异性模拟。

表 3 竖直方向土体类型转移似然比检验

Table 3 Likelihood ratio tests on soil state transitions in vertical direction				
项 目	竖直向下似然比统计量	竖直向上似然比统计量	自由度	5% 显著性水平临界值
${}_0\eta_1$	771.24	771.24	4	9.49
${}_0\eta_2$	780.92	780.92	6	12.59
${}_0\eta_3$	793.88	793.88	52	69.83
${}_1\eta_2$	19.68	19.68	12	21.02
${}_1\eta_3$	22.64	22.64	48	65.17
${}_2\eta_3$	2.96	2.96	36	186.15
${}_3\eta_3$	0.00	0.00	0	0.00

6.2 钻孔布置方案对转移概率矩阵估计的影响

本节将研究不同钻孔布置方案对转移概率矩阵估计的影响。首先，为了反映钻孔数目和钻孔位置对转移概率矩阵估计结果的影响，根据研究区域已有的五个钻孔资料布置了 4 种钻孔方案，如表 4 所示，不同钻孔布置方案对应的钻孔数目或位置有所不同。其中方案 3A 包含了钻孔 1、3 和 5，而方案 3B 也包含了 3 个钻孔，但位置与方案 3A 有所不同，布置这两种方案是为了比较钻孔数目相同时不同钻孔位置对转移概率矩阵估计的影响。表中“√”表示相应的钻孔布置方案包含该钻孔。

不同钻孔布置方案对应的竖直两方向转移概率矩

阵可由式 (6) 估计得到, 结果如表 5 所示, 可见不同的钻孔布置方案对应的竖直方向转移概率矩阵存在一定的差别, 对比方案 3A 和方案 3B 可知, 虽然两组具有相同的钻孔数目但所得的竖直方向转移概率矩阵有所不同。由表可知, 砂土转移至砂砾的概率为 0, 同时砂砾转移至砂土的概率也为 0, 说明这两种土体类型在模拟过程中不会相互转移。利用本文所提方法对四种不同钻孔布置方案下水平方向转移概率进行估

计, 结果如表 6 所示, 各方案估计所得的水平方向转移概率矩阵存在一定的差别。其中方案 2 所得的水平方向转移概率矩阵与方案 5 所得结果差别最大。同时对方案 3A 和 3B 可以看出, 两方案虽然具有相同的钻孔数目但所得的水平方向转移概率矩阵也存在一定的差别。由此表明钻孔数目和位置对水平方向转移概率矩阵的估计都十分重要, 为获得准确的结果应提供足够的钻孔数据信息。

表 4 不同的钻孔布置方案

Table 4 Different layout schemes of boreholes considered in this study					
钻孔布置方案	钻孔 1	钻孔 2	钻孔 3	钻孔 4	钻孔 5
2		√		√	
3A	√		√		√
3B		√	√	√	
5	√	√	√	√	√

表 5 不同的钻孔布置方案估计的竖直方向转移概率矩阵

Table 5 Vertical transition probability matrices for various layout schemes of boreholes												
土类	(a1) 竖直向下转移概率			(a2) 竖直向上转移概率			(b1) 竖直向下转移			(b2) 竖直向上转移概率		
	矩阵 (方案 2)			矩阵 (方案 2)			概率矩阵 (方案 3A)			矩阵 (方案 3A)		
	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)
1 (黏土)	0.935	0.028	0.037	0.935	0.028	0.037	0.932	0.031	0.037	0.932	0.031	0.037
2 (砂土)	0.051	0.949	0.000	0.051	0.949	0.000	0.059	0.941	0.000	0.059	0.941	0.000
3 (砂砾)	0.100	0.000	0.900	0.100	0.000	0.900	0.098	0.000	0.902	0.098	0.000	0.902
土类	(c1) 竖直向下转移概率			(c2) 竖直向上转移概率			(d1) 竖直向下转移概率			(d2) 竖直向上转移概率		
	矩阵 (方案 3B)			矩阵 (方案 3B)			矩阵 (方案 5)			矩阵 (方案 5)		
	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)
1 (黏土)	0.935	0.028	0.037	0.935	0.028	0.037	0.937	0.030	0.033	0.937	0.030	0.033
2 (砂土)	0.051	0.949	0.000	0.051	0.949	0.000	0.056	0.944	0.000	0.056	0.944	0.000
3 (砂砾)	0.100	0.000	0.900	0.100	0.000	0.900	0.088	0.000	0.912	0.088	0.000	0.912

表 6 不同的钻孔布置方案估计的水平方向转移概率矩阵

Table 6 Horizontal transition probability matrices for various layout schemes of boreholes												
土类	(a1) 水平向右转移概率			(a2) 水平向左转移概率			(b1) 水平向右转移概率			(b2) 水平向左转移概率		
	矩阵 (方案 2)			矩阵 (方案 2)			矩阵 (方案 3A)			矩阵 (方案 3A)		
	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)
1 (黏土)	0.988	0.005	0.007	0.989	0.005	0.006	0.985	0.007	0.008	0.985	0.007	0.008
2 (砂土)	0.009	0.991	0.000	0.009	0.991	0.000	0.013	0.987	0.000	0.013	0.987	0.000
3 (砂砾)	0.019	0.000	0.981	0.018	0.000	0.982	0.021	0.000	0.979	0.021	0.000	0.979
土类	(c1) 水平向右转移概率			(c2) 水平向左转移概率			(d1) 水平向右转移概率			(d2) 水平向左转移概率		
	矩阵 (方案 3B)			阵 (方案 3B)			矩阵 (方案 5)			矩阵 (方案 5)		
	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)	1 (黏土)	2 (砂土)	3 (砂砾)
1 (黏土)	0.983	0.009	0.009	0.983	0.009	0.009	0.979	0.010	0.011	0.979	0.010	0.011
2 (砂土)	0.017	0.983	0.000	0.017	0.983	0.000	0.018	0.982	0.000	0.018	0.982	0.000
3 (砂砾)	0.024	0.000	0.976	0.024	0.000	0.976	0.029	0.000	0.971	0.029	0.000	0.971

6.3 钻孔布置方案对地层变异性的影响

本节根据各钻孔布置方案计算所得转移概率矩阵以及钻孔资料进行地层变异性模拟,探讨不同钻孔布置方案对地层变异性的影响。模拟次数可由总信息熵值是否收敛进行确定,图4给出了4种钻孔布置方案下总信息熵值随模拟次数的变化,可见当模拟次数达到200后总信息熵值基本保持稳定,400次后基本不变,在此模拟次数选用400次。采用前述方法可得各钻孔布置方案对应的总信息熵值,结果如图5所示,对比方案2[钻孔(2 4)]、3B[钻孔(2 3 4)]、5[钻孔(1 2 3 4 5)]可知,总体来说随着钻孔数目的增加,总信息熵值逐渐减小,这表明随着钻孔数目的增加,模拟的地层变异性的不确定性逐渐降低。

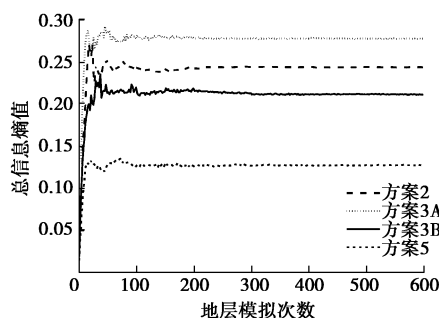


图4 总信息熵值随地层模拟次数的变化

Fig. 4 Evolution of total information entropy with number of stratigraphic realizations

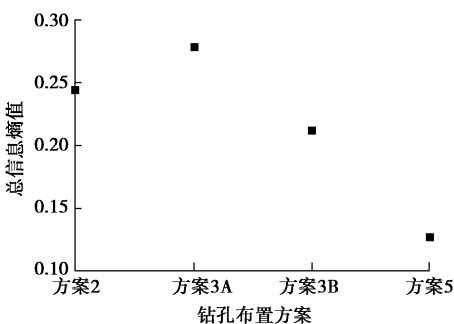


图5 不同钻孔布置方案对应的总信息熵值

Fig. 5 Total information entropy associated with various layout schemes of boreholes

图6给出了不同钻孔布置方案对应的信息熵图,其中灰颜色越深表示不确定性越大;反之,不确定性越小。由图6可知,随着钻孔数目的增加,不确定性区域(灰色区域)范围逐渐减小。这主要是因为钻孔数据资料对钻孔周围出现何种土体类型有较大的影响,当钻孔间距较大时,模拟的地层不确定性较大,随着钻孔间距的减少,模拟的地层不确定性逐渐减小。图7,8分别给出了钻孔布置方案2[钻孔(2 4)]和方案5[钻孔(1 2 3 4 5)]的两次地层实现。对比图7,8结果可知,方案2中两次地层实现之间的差异明显要大于方案5中两次地层实现之间的差异,这进一步说明增加钻孔将降低地层模拟的

不确定性。对比方案3A[钻孔(1 3 5)]和3B[钻孔(2 3 4)],由图5可知,虽然钻孔数目相同但方案3B对应的总信息熵值却要小于方案3A。同时对比图6(b)、(c)可知,方案3A对应的地层不确定性区域范围明显大于方案3B,这说明钻孔位置对地层变异性模拟有明显的影响,在给定的钻孔数目前提下,应尽可能地将钻孔布置于重点研究的区域。根据信息熵图,工程师可以直观地判断是否还需要进一步增加钻孔以减小地层模拟的不确定性。如图6(a)中方案2对应的信息熵图,其中地层模拟不确定性区域较大,此时工程师可以在不确定性区域较大的位置增加钻孔从而能够有效地减小地层模拟不确定性。另一方面,图6(d)中方案5对应的信息熵图,地层模拟的不确定性区域已经较小,进一步增加钻孔并不能有效地减小地层模拟的不确定性,反而增加了成本。

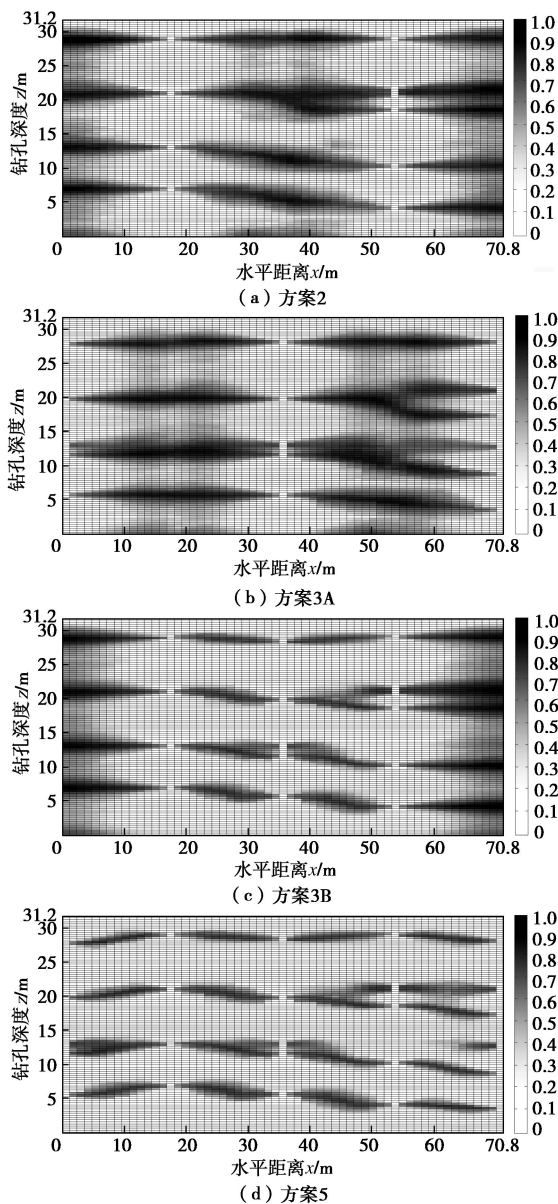


图6 不同钻孔布置方案对应的信息熵图

Fig. 6 Information entropy plots associated with various layout schemes of boreholes

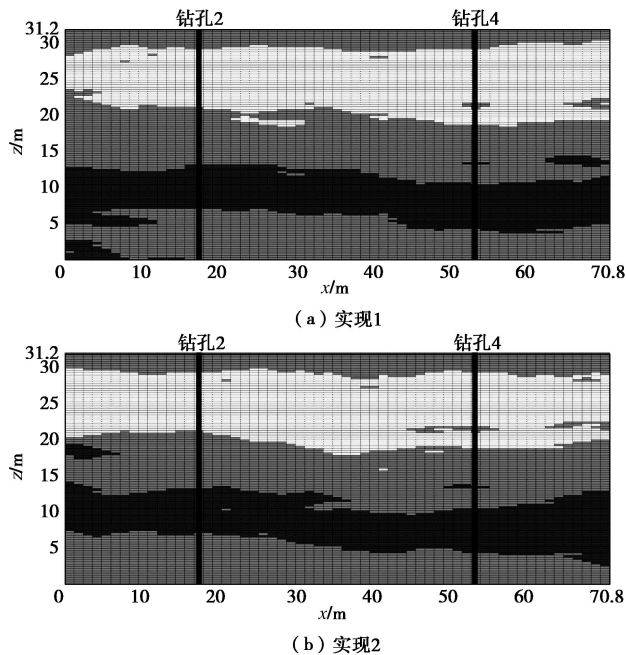


图 7 方案 2 的地层两次典型实现

Fig. 7 Two typical realizations of geological uncertainty for Scheme 2

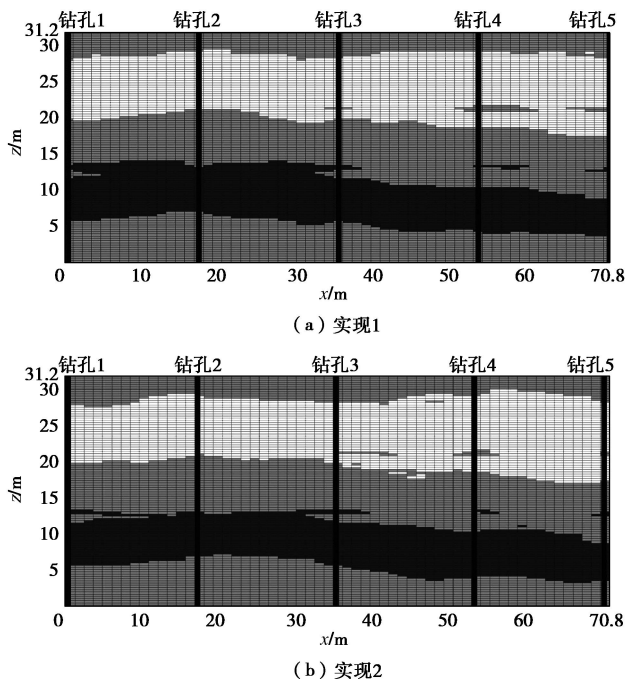


图 8 方案 5 的地层两次典型实现

Fig. 8 Two typical realizations of geological uncertainty for Scheme 5

7 结 论

本文提出了一种基于钻孔资料的广义耦合马尔可夫链水平两方向转移概率矩阵极大似然估计方法,验证了该方法的有效性,据此对地层不确定性进行了分析,采用信息熵图量化地层变异性。以爱尔兰地区都

柏林市丹拉海港口处的钻孔数据为例进行地层变异性模拟,分析了钻孔布置方案对各方向转移概率矩阵估计的影响,探讨了钻孔布置方案对地层变异性模拟的影响规律。主要结论如下:

(1) 提出的基于钻孔资料的极大似然估计方法能够有效地对水平两方向转移概率矩阵进行估计,为基于钻孔资料的地层不确定性分析奠定了基础。

(2) 钻孔布置方案对各方向上转移概率矩阵的估计和地层变异性的模拟结果都十分重要,为获得准确的转移概率矩阵应提供足够的钻孔数据。随着钻孔数目的增加,总信息熵值逐渐减小,地层变异性模拟的不确定性逐渐减小。对于钻孔数目相同的两种布置方案,钻孔位置对地层变异性模拟有明显的影响,应将钻孔布置于重点研究区域,尽量减少地层模拟不确定性。

(3) 信息熵图能够直观地量化地层模拟不确定性,并可用于指导钻孔方案的布置。

参考文献:

- [1] HU Q F, HUANG H W. Risk analysis of soil transition in tunnel works[C]// Underground Space--the 4th Dimension of Metropolises: Proceedings of the 33rd ITA-AITES World Tunnel Congress. London: Taylor & Francis, 2007.
- [2] HANSEN L, EILERTSEN R, SOLBERG I L, et al. Stratigraphic evaluation of a Holocene clay-slide in Northern Norway[J]. Landslides, 2007, 4(3): 233.
- [3] SCHULZ W H, MCKENNA J P, KIBLER J D, et al. Relations between hydrology and velocity of a continuously moving landslide—evidence of pore-pressure feedback regulating landslide motion?[J]. Landslides, 2009, 6(3): 181 - 190.
- [4] 邓志平, 李典庆, 曹子君, 等. 考虑地层变异性与土体参数变异性的边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(6): 986 - 995. (DENG Zhi-ping, LI Dian-qing, CAO Zi-jun, et al. Slope reliability analysis considering geological uncertainty and spatial variability of soil parameters[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(6): 986 - 995. (in Chinese))
- [5] 祁小辉, 李典庆, 曹子君, 等. 考虑地层变异的边坡稳定不确定性分析[J]. 岩土力学, 2017, 38(5): 1385 - 1396. (QI Xiao-hui, LI Dian-qing, CAO Zi-jun, et al. Uncertainty analysis of slope stability considering geologic uncertainty[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(5): 1385 - 1396. (in Chinese))
- [6] ELKATEB T, CHALATURNYK R, ROBERTSON P K. An overview of soil heterogeneity: quantification and

- implications on geotechnical field problems[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, **40**(1): 1 - 15.
- [7] LIAO T, MAYNE P W. Stratigraphic delineation by three-dimensional clustering of piezocone data[J]. Georisk Assessment & Management of Risk for Engineered Systems & Geohazards, 2007, **1**(2): 102 - 119.
- [8] CAO Z, WANG Y. Bayesian approach for probabilistic site characterization using cone penetration tests[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2013, **139**(2): 267 - 276.
- [9] CHING J, WANG J, JUANG C H, et al. Cone penetration test (CPT)-based stratigraphic profiling using the wavelet transform modulus maxima method[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2015, **52**(12): 1993 - 2007.
- [10] NOBRE M M, SYKES J F. Application of Bayesian kriging to subsurface characterization[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2011, **29**(4): 589 - 598.
- [11] DASAKA S M, ZHANG L M. Spatial variability of in situ weathered soil[J]. Géotechnique, 2012, **62**(5): 375 - 384.
- [12] SCHÖBI R, SUDRET B. Application of conditional random fields and sparse polynomial chaos expansions to geotechnical problems[J]. Geotechnical Safety and Risk V, 2015: 445.
- [13] ZHANG L M, DASAKA S M. Uncertainties in geologic profiles vs. variability in pile founding depth[J]. Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering, 2010, **136**(11): 1475 - 1488.
- [14] SITHARAM T G, SAMUI P, ANBAZHAGAN P. Spatial variability of rock depth in bangalore using geostatistical, neural network and support vector machine models[J]. Geotechnical & Geological Engineering, 2008, **26**(5): 503 - 517.
- [15] LI X Y, ZHANG L M, LI J H. Using conditioned random field to characterize the variability of geologic profiles[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2015, **142**(4): 04015096.
- [16] ELFEKI A, DEKKING M. A Markov chain model for subsurface characterization: theory and applications[J]. Mathematical Geology, 2001, **33**(5): 569 - 589.
- [17] 祁小辉, 李典庆, 周创兵, 等. 基于钻孔资料的耦合马尔可夫链水平方向转移概率矩阵估计[J]. 应用基础与工程科学学报, 2017, **25**(5): 967 - 984. (QI Xiao-hui, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Estimation of horizontal transition probability matrix for coupled Markov chain based on borehole data[J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2017, **25**(5): 967 - 984. (in Chinese))
- [18] ELFEKI A, DEKKING M. Modelling subsurface heterogeneity by coupled Markov chains: directional dependency, walther's law and entropy[J]. Geotechnical and Geological Engineering, 2005, **23**(6): 721 - 756.
- [19] ELFEKI A, DEKKING M. Reducing geological uncertainty by conditioning on boreholes: the coupled Markov chain approach[J]. Hydrogeology Journal, 2007, **15**(8): 1439 - 1455.
- [20] PARK E, ELFEKI A, SONG Y, KIM K. Generalized coupled Markov chain model for characterizing categorical variables in soil mapping[J]. Soil Science Society of America Journal, 2007, **71**(3): 909 - 917.
- [21] PARK E. A multidimensional, generalized coupled Markov chain model for surface and subsurface characterization[J]. Water Resources Research, 2010, **46**(11): 6291 - 6297.
- [22] QI X H, LI D Q, PHOON K K, et al. Simulation of geologic uncertainty using coupled Markov chain[J]. Engineering Geology, 2016, **207**: 129 - 140.
- [23] LI W, ZHANG C. A single-chain-based multidimensional Markov chain model for subsurface characterization[J]. Environmental and Ecological Statistics, 2008, **15**(2): 157 - 174.
- [24] WELLMANN J F, REGENAUER-LIEB K. Uncertainties have a meaning: information entropy as a quality measure for 3-D geological models[J]. Tectonophysics, 2012, **526-529**(2): 207 - 216.
- [25] LI Z, WANG X, WANG H, et al. Quantifying stratigraphic uncertainties by stochastic simulation techniques based on Markov random field[J]. Engineering Geology, 2016, **201**(22): 106 - 122.