

DOI: 10.11779/CJGE201808001

土的现代本构理论的发展回顾与展望

杨光华

(1. 广东省水利水电科学研究院, 广东 广州 510610; 2. 华南理工大学土木与交通学院, 广东 广州 510640; 3. 广东省岩土工程技术研究中心, 广东 广州 510610)

摘要: 土的本构模型是现代土力学的核心和关键。自从剑桥弹塑性模型创立以来, 土的本构模型历经了 50 多年的研究, 建立的模型数以百计, 但真正能为工程所应用的则很少, 如何更好地发展岩土本构模型? 为此, 回顾和分析了各种建立岩土本构模型的理论, 认为要较好解决岩土本构模型的问题, 首先要有适合岩土材料的本构理论, 传统应用的一些理论用于岩土材料是有其局限性的。广义位势理论是一种普遍和方便的建模理论。本构模型的验证除在主空间上进行试验验证外, 更合理的应该是进行边值问题的验证。同时, 要使模型能用于工程设计, 则应发展参数易于确定的模型, 还需要解决模型参数的合理确定问题, 对于天然岩土材料, 由于取样扰动等的影响, 室内参数与原位土差异较大, 发展基于原位试验的模型参数确定方法, 可能是解决的途径。

关键词: 本构理论; 广义位势理论; 进展与展望

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2018)08-1363-10

作者简介: 杨光华(1962-), 男, 广东罗定人, 博士, 教授级高级工程师, 博士生导师, 主要从事本构理论、基础工程、软土工程及基坑工程等方面的研究、设计及咨询工作。E-mail: 1084242143@qq.com。

Review of progress and prospect of modern constitutive theories for soils

YANG Guang-hua

(1. Guangdong Research Institute of Water Resources and Hydropower, Guangzhou 510610, China; 2. Institute of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China, 3. The Geotechnical Engineering Technology Center of Guangdong Province, Guangzhou 510610, China)

Abstract: The constitutive model for soils is the core and key of modern soil mechanics. Since the creation of Cambridge elasto-plastic model, the constitutive model for soils has been studied for more than 50 years, and hundreds of models have been established, but few of them can be used for engineering. How to develop the constitutive model for rocks and soils better? In this paper, the theories of various constitutive models are reviewed and analyzed. In order to solve the problem, Firstly, there must be some theories of constitutive model suitable for geotechnical materials, in which the traditional theories have their limitations. The generalized potential theory is a modeling theory which is general and convenient. For the verification of the constitutive model, it is more reasonable to verify the problem of boundary values in addition to the experimental verification in the main space. At the same time, a model easy to determine the parameters should be developed to be used in engineering design. In addition, the problem of reasonable determination of model parameters also needs to be solved. For natural geotechnical materials, due to the impact of sampling disturbances, the difference is large, and the method for determining the model parameters based on the in-situ tests should be developed, which may be the solution.

Key words: constitutive theory; generalized potential theory; progress and prospect

0 引言

岩土本构模型是现代岩土力学的核心, 是力学三大基本方程之一, 是计算岩土结构变形的基本方程。当今岩土数值计算已解决了以往计算的困难, 要使岩土计算更符合实际, 关键是如何建立更符合实际的本构模型。以土力学为例, 自从 1963 年剑桥大学 Roscoe 等利用弹塑性理论建立第一个土的弹塑性模型后来被

称为剑桥模型^[1]以来已历经了 50 多年, 取得了辉煌成就, 建立了数以百计的各种岩土本构模型, 但真正能用于工程设计的模型还不多, 能被规范采用的则更少, 更多的是用于进行工程方案的比较分析。究其原因,

基金项目: 国家自然科学基金项目(51778152, 51378131); 广东省省级科技计划项目(2014B070706008)

收稿日期: 2017-07-15

主要还是对本构模型的准确性缺乏信心,具体表现如下:

一是对岩土本构的力学特性的认识还不够充分,深恐实际问题的复杂性、产生或发生的现象会超乎预测,如软化、剪胀、高围压下的塑性化、应力路径的影响,小应变,主轴旋转产生塑性应变以及岩爆等,这些变形特性都是在研究的深入后逐步为人们所认识的。

二是本构特性表述的理论不够完善。目前的本构模型是利用传统的本构理论来建立模型,而这些理论多数是建立于金属材料试验的基础上的,其中包含了一些假设,通常对其包含的假设没有深入透彻地认识,基于此建立的本构模型可能并不能很好地描述岩土的本构特性。如目前应用最广的弹塑性本构理论,从理论上只存在关联流动模型,但这样的模型在反映剪胀性上不够理想,于是发展了非关联流动模型,但非关联流动并不符合 Drucker 公设,理论上合理吗?弹塑性本构理论如何更好地与试验曲线相结合?传统理论中只有屈服函数,用硬化参数描述硬化的过程,各种硬化参数或屈服函数通常是用简单试验的结果来进行试凑,是否有效并无把握,由此而出现了很多模型,而且一种模型也只能对某一试验结果凑出较接近的结果,固而还是缺乏适合于岩土材料的本构理论,只能利用已有的一些本构理论进行建模,当发现与岩土材料不符时,只能在原有理论基础上进行修补,以获得适应性,并未真实深刻理解传统理论的假设,因而是否真能反映岩土的本构特性还不是充分可信。在应用广义虎克定律建立土的本构模型时也取得很好的效果,如著名的 Duncan-Chang 模型^[2],但由于其依据的理论是假设了泊松比 $\mu < 0.5$ 的,而用此模型只有泊松比大于 0.5 时才能反映土三轴试验中的剪胀性,因而采用这样的理论基础建立的模型并不能反映岩土的剪胀特性。为克服这一缺点,于是就演化发展了各种 $K-G$ 模型, $K-G$ 模型只是建立了主空间的方程和参数,但如何转换为数值计算的本构方程就遇到了理论瓶颈,于是又发展了解耦模型^[3]、次弹性模型^[4-5]、各种变弹性模型^[6]和三参数模型^[7]以及各种多重屈服面理论^[8-13]。清华模型直接利用试验的塑性应变增量方向,根据正交法则确定屈服函数和硬化参数^[14-16],提高了模型的可靠性。姚仰平在剑桥模型基础上改进硬化参数,可以表达各种土的复杂特性,拓宽了剑桥模型的适用范围^[17]。这些都是对传统理论的丰富。

显然,现代岩土本构模型建立的理论仍未跳出传统理论的限制,只是在传统理论上作进一步的假设。但由于对其数学原理没有更深刻的认识,缺乏更普遍

适用的本构理论,这一状况限制了岩土本构模型的发展,使建立更合适模型缺乏理论基础。

三是参数的确定不够合理。由于模型参数通常由室内试验确定,但岩土材料具有较强的结构性,对原生天然岩土体,取样存在应力释放、扰动等影响,取出的样品会由于与处于原位的样品发生变化而不同,因而室内试验得到的特性会与原位土的特性不同,这样依据室内试验参数模型计算的结果与实际原位岩土体受力变形不一致。较简单的例子是地基的沉降计算问题^[18-19],规范^[20]采用一维压缩分层总和法计算地基的沉降,理论计算后要采用一个经验系数进行修正,修正系数为 0.2~1.4,相差 7 倍,似乎是经验多于理论了。

因此,要解决岩土本构模型,必须深入研究其本构特性,同时发展适合岩土的更普遍的本构理论,合理确定模型参数。

1 岩土的主要本构特性

岩土材料比金属材料更复杂,其主要特性应为:①非线性;②压硬性;③弹塑性;④剪胀性;⑤应力路径相关性;⑥应变软化;⑦蠕变性。当然还有一些更复杂的特性,只是这些是目前工程常遇到的主要特性。目前的本构模型主要反映前面 4 个特性。通常研究其特性是采用常规三轴压缩试验 $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ 的应力状态。典型的应力应变曲线如图 1 所示。

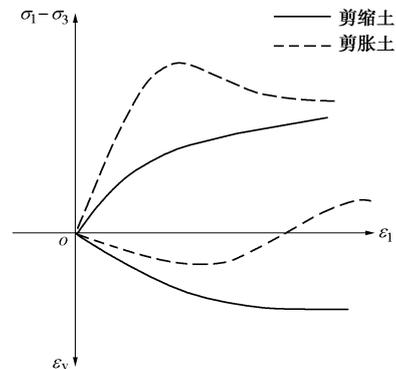


图 1 岩土材料典型应力应变曲线

Fig. 1 Typical stress-strain curves of geomaterials

2 岩土的传统本构理论问题

目前岩土本构特性的试验只能在主应力空间上进行,获得的试验曲线也是主空间上的曲线,但数值计算需要六维应力应变空间上的本构方程,因此,岩土本构模型的两个根本问题是:①主空间上的本构特性的试验和数学表述;②六维应力应变关系方程的建立^[21]。

现有理论的建立较多从物理假设出发,假设条件

不够详细和通用,各理论缺乏联系。如线性弹性理论与弹塑性理论有何联系和区别?除了加卸荷的表述不同外,其他表述及结果一样吗?例如一个试验结果,应该采用什么理论建模更合适?这是不太清楚的,因而同一个试验结果,人们可以用不同理论建模,如基于广义虎克定律的增量非线性,也可以采用增量弹塑性理论,还可以采用次弹性或亚塑性理论等,为什么这样用,数学和理论上并不太明确,也缺乏深究,只是在试用,以往在理论上也没有很好地解决。

直观较好的建模方法是直接依据试验曲线建立模型,只要有试验曲线,通过拟合试验曲线就可直接建立模型,这样就统一方便,适应性广,但要有理论基础。

2.1 基于广义虎克定律的模型

如 Duncan-Chang 模型,基于广义虎克定律,只有两个参数 E , μ , 这两个参数直接利用常规三轴试验曲线而求得,对试验曲线假设符合双曲线方程。这样参数少,可用双曲线方程拟合试验曲线,然后求 E , μ 。其理论基础是广义虎克定律,较好反映了土的非线性、压硬性这两个主要特性,参数物理意义明确,工程应用广泛。

2.2 弹塑性模型

弹塑性模型依据弹塑性的本构理论,构建屈服函数和硬化规律,是目前最活跃的模式。存在的困难在于岩石的屈服函数确定困难、硬化规律等与试验曲线没有直接的联系,传统的模型其实并不太理想,以致后来又发展了多重屈服面模型,甚至有一时期还发展无屈服面的内时理论,目前已较少研究。土的弹塑性模型总体应用较多的是剑桥模型,该模型特点是参数简单。弹塑性模型可以反映非线性、压硬性、弹塑性、剪胀性等,剪胀性模型目前还缺乏公认的模型,表达不理想,近期国内发展广义塑性模型来提高反映粗粒土剪胀性的可靠性^[22-25]。传统理论也存在一些缺陷,如非关联流动的理论解释,认为不符合 Drucker 公设等,杨光华对此给出了一种理论解释^[26]。弹塑性理论的数学背景及假设一般研究者未深究,通常直接应用,发现表达不好时,就不断地修正,从而出现模型众多。

2.3 其他模型

如次弹性、柯西非线性、亚塑性等的研究,但这些模型的数学背景、物理意义也不很清楚,模型参数缺少直接的物理意义,研究较多,工程应用较少。因此要解决岩土本构模型的问题,仅靠传统的本构理论并不理想,主要是缺乏数学原理清楚、物理意义明确的本构理论,这是制约岩土本构模型发展的瓶颈^[27]。

3 适用于岩土材料的广义位势本构理论

3.1 广义位势本构理论简介

比较直接可靠的方法是根据试验曲线直接建立模型,这就需要有一个数学理论清楚、物理意义明确、能适合岩土材料变形特性的本构理论,现有理论多是建立于金属材料试验基础上的特殊理论,应用于表达岩土本构特性时有其局限性,结果总难如意,有必要发展新本构理论。

杨光华等^[28-33]提出的广义位势理论是解决岩土本构模型的理论基础,该理论直接从数学角度出发,可以直接拟合主空间试验曲线,然后通过坐标变换的势函数方法构建六维空间的数值计算本构方程。这是一套包含应力空间和应变空间的理论,该理论包括了传统的一些建模理论作为其特例,并把现有的建模理论通过数学关系联系起来形成了系统性的本构理论。以增量方法的应力空间表达为例简介如下。

为方便,以 $p-q$ 空间为例,通过主空间试验曲线求得主空间上的本构方程,分解出弹性应变和塑性应变,弹性应变部分按广义虎克定律确定:

$$\{d\varepsilon_e\} = [D_e]^{-1} \{d\sigma\} \quad (1)$$

主空间上的塑性应变增量关系为

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^p &= Adp + Bdq \\ d\varepsilon^p &= Cdp + Ddq \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由主空间的位势函数构建六维空间的本构方程时,当假设塑性应变增量方向与应力总量方向相同时,可以称其为塑性分解准则,当假设应变增量方向与应力增量方向相同时,称其为弹性分解准则^[33]。这样,对于塑性应变,按广义位势理论,这是一个二维问题,可以选用任意两个梯度矢量线性无关的势函数 Q_1 , Q_2 , 为简便,可取 $Q_1=p$, $Q_2=q$, 则有

$$d\varepsilon^p = d\lambda_1 \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3)$$

矩阵表达为

$$\{d\varepsilon^p\} = d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} \right\} + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \quad (4)$$

$d\lambda_1$, $d\lambda_2$ 可通过式 (2) 求得

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^p &= d\lambda_1 = Adp + Bdq \\ d\varepsilon^p &= d\lambda_2 = Cdp + Ddq \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由式 (3) 可见, Q_1 , Q_2 可以选为任意形式的 p , q 函数,求导后都可化为式 (3) 的形式,所以势函数是借用的手段,实际不需要具体推求。

经由推导可得六维应力应变空间上的弹塑性矩阵为^[33-34]

$$\{d\sigma\} = [D_{ep}] \{d\varepsilon\}, \quad (6)$$

$$[D_{ep}] = [D_e] - \frac{1}{|A|} \cdot (A_{pp}[D_e] \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] + A_{qq}[D_e] \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] + A_{pq}[D_e] \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] + A_{qp}[D_e] \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e]) \quad (7)$$

式中,

$$A_{pp} = A + (AD - BC) \cdot \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\},$$

$$A_{pq} = B + (AD - BC) \cdot \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\},$$

$$A_{qp} = C + (AD - BC) \cdot \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\},$$

$$A_{qq} = D + (AD - BC) \cdot \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\}.$$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$a_{11} = 1 + A \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\} + C \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\},$$

$$a_{12} = B \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\} + D \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\},$$

$$a_{21} = A \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\} + C \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\},$$

$$a_{22} = 1 + B \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\} + D \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\}.$$

其中, $[D_e]$ 为弹性矩阵。

这样广义位势理论可以直接根据主空间上的试验曲线确定塑性系数 A, B, C, D 4 个参数, 然后通过数学坐标变换方法由主空间的本构方程求得六维应力应变空间的本构方程, 而主空间到六维空间的变换过程是一个数学问题, 广义位势理论数学原理清楚、物理意义假设清楚, 无需通常弹塑性理论推求屈服函数或塑性势函数的麻烦。同样还可以很方便的建立应变空间的弹塑性本构模型^[33, 35]

3.2 与传统弹塑性本构理论的关系

由以上 A, B, C, D 4 个参数的关系则可以清楚广义位势理论与传统弹塑性理论的关系。按传统弹塑性理论, 设塑性势函数为 g , 屈服函数为 f , 则按非关联流动法则得主空间上的本构方程为

$$d\varepsilon_v^p = d\lambda \left(\frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} dq \right),$$

$$d\varepsilon^p = d\lambda \left(\frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial q} dq \right).$$

可简写为

$$d\varepsilon_v^p = A_{pp} dp + A_{pq} dq, \quad (8)$$

$$d\varepsilon^p = A_{qp} dp + A_{qq} dq,$$

显然比较式 (2)、(8) 可见:

$$A = A_{pp}, B = A_{pq}, C = A_{qp}, D = A_{qq} dq.$$

由 (8) 式可见, 当非关联时, 有

$$AD - BC = 0, \quad B \neq C. \quad (9)$$

当相关联时, $g=f$, 则有

$$AD - BC = 0, \quad B = C. \quad (10)$$

而广义位势理论并没有对 A, B, C, D 四个参数的限定关系, 这样, 当广义位势理论中 A, B, C, D 四个参数满足式 (9) 条件时, 则转化为传统的非关联流动法则, 当满足式 (10) 关系时, 则转化为传统的关联流动法则, 可见传统的弹塑性本构理论是广义位势理论的特例^[33-36]。

从数学上, 把式 (2) 写成矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_v^p \\ d\varepsilon^p \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dp \\ dq \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

简写为

$$\{d\varepsilon^p\} = [A] \{d\sigma\}. \quad (12)$$

由此可以从数学上认识所谓的塑性应变增量方向的问题。

显然, 在式 (11) 或 (12) 中, 传统理论无论是关联或非关联流动法则, 都有 $AB - CD = 0$, 也即矩阵 $[A]$ 的秩为 1, 则数学上说明塑性应变增量方向与应力增量方向是无关的^[33, 36]。对于三维问题可以得到同样结果, 说明传统弹塑性理论无论关联或非关联都不能表述塑性应变增量方向与应力增量方向相关性的问题^[37], 而广义位势理论则可以表述, 因其可以表述 $AB - CD \neq 0$ 的情况, 因而具有更普遍的表述能力。郑颖人^[38]在此基础上进一步发展了广义塑性力学, 认为基于广义 (塑性) 位势理论的广义塑性力学是更适合岩土材料的本构理论。

3.3 若干应用

广义位势理论可以与现有的模型和试验条件结合而发展进步, 体现其方便性和科学性。如与 $E-\mu$ 模型、 $K-G$ 模型的结合可以方便地建立弹塑性模型, 更方便反映剪胀性, 可以更灵活地建立弹塑性模型, 如建立拟塑性弹塑性模型^[39], 把具有弹性特性的塑性应变分开表述; 可以直接从数学角度改进剑桥模型, 建立类剑桥模型^[40]、用广义位势理论改进剑桥模型^[41]、建立接触面弹塑性模型^[42]或更复杂土的本构模型^[43]等。

(1) 用常规三轴试验建立的广义位势理论模型

模型关键是确定 A, B, C, D 这 4 个塑性参数。为简化, 可以规定 A, B, C, D 这 4 个塑性参数满足关联流动条件:

$$AB - CD = 0, \quad B = C \quad (13)$$

这样 4 个参数已有 2 个方程，再利用常规三轴试验可以求得切线模量 E_t 和泊松比 μ_t 这两个参数，这样可以有 4 个条件就可确定 A, B, C, D 这 4 个塑性参数，从而可由 E_t, μ_t 表示 A, B, C, D 这 4 个塑性参数^[34]。

当材料试验曲线符合双曲线方程时，可以用 Duncan-Chang 模型方法来确定 E_t, μ_t ^[32, 34]。当材料具有剪胀性时，则 $\mu_t > 0.5$ ，本模型也可应用。若试验曲线复杂，也可以直接根据试验曲线，建立 E_t, μ_t 与应力状态的数值关系，有限元计算时，直接根据单元应力对应插值确定 E_t, μ_t 即可，这可以称为数值广义位势理论模型，这样可适应广泛的试验曲线^[33, 44]。

文献[33, 44]计算了一个碎石桩的试验，体现了剪胀性的影响。如图 2 所示的碎石桩复合体在三轴试验下，数值广义位势理论模型比 Duncan-Chang 模型能更好地反映剪胀性的作用和特性，如图 3, 4 所示。

由图 4 可见，邓肯-张模型不能反映碎石的剪胀性，数值模型可以，反映到应力上如图 3 所示，碎石体剪胀受到外圈土体约束， σ_3 增加大，而外圈土体环向 σ_3 下降多，数值模型更能体现。

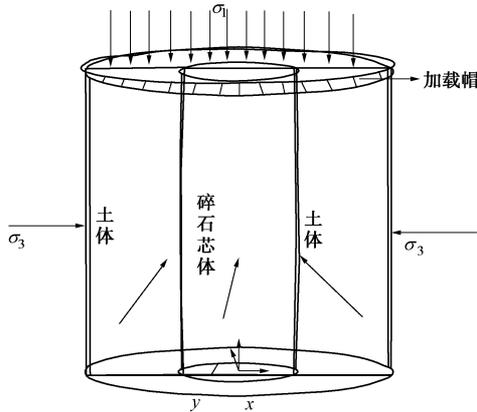


图 2 碎石桩复合土体三轴试验示意图

Fig. 2 Schematic diagram of triaxial tests on gravel pile composite foundation

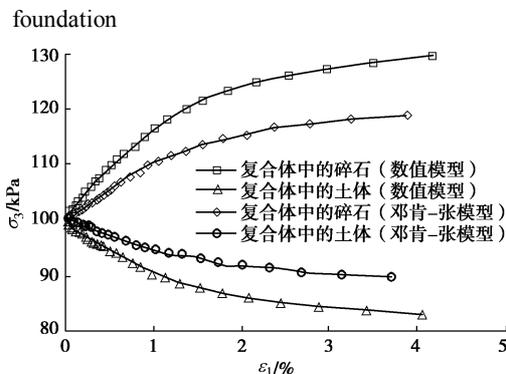


图 3 碎石和土体的最小主应力 σ_3 与轴向应变 ϵ_1 关系的计算结果

Fig. 3 Calculated results of relationship between σ_3 and ϵ_1 of gravel and soil in composite foundation

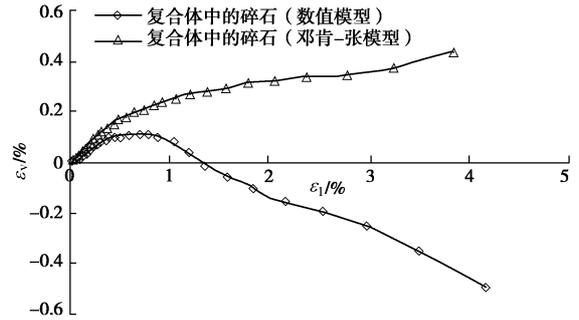


图 4 复合体中碎石的体应变 $\epsilon_v - \epsilon_1$ 关系的计算结果

Fig. 4 Calculated results of relationship between ϵ_v and ϵ_1 of gravel in composite foundation

(2) 广义位势理论的 $K-G$ 模型

对于粗粒土等一些材料，为方便考虑体积或剪胀性，人们喜欢用弹性 $K-G$ 模型来表述，建立了通常的四参数模型：

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_v &= \frac{1}{K_1} dp + \frac{1}{K_2} dq, \\ \bar{d}\epsilon &= \frac{1}{G_1} dp + \frac{1}{G_2} dq. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

但当采用广义虎克定律来建立六维应力应变空间上的模型时，遇到 K_2, G_1 的存在，较难处理，因而高莲士等^[3]发展了解耦模型。其实当建立了式 (14) 后，可很方便应用广义位势理论来建立六维应力应变空间的模型。

如果分开弹塑性应变，设弹性应变为

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_v^e &= \frac{1}{K_e} dp, \\ \bar{d}\epsilon^e &= \frac{1}{G_e} dq. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

K_e, G_e 分别为弹性体积模量与剪切模量，则由式 (14)、(15) 可得塑性应变增量为

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_v^p &= \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_e} \right) dp + \frac{1}{K_2} dq, \\ \bar{d}\epsilon^p &= \frac{1}{G_1} dp + \left(\frac{1}{G_2} - \frac{1}{G_e} \right) dq. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

对比式 (2)、(16) 可得到式 (2) 中 A, B, C, D 四个系数为

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_e}, \\ B &= \frac{1}{K_2}, \\ C &= \frac{1}{G_1}, \\ D &= \frac{1}{G_2} - \frac{1}{G_e}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

把 K_e , G_e , A , B , C , D 代入式 (6) 即可得广义位势理论的 $K-G$ 弹塑性模型, 这是可以反映剪胀压硬性的弹塑性模型, 这样建模简单方便、可靠, 数学原理清晰。

同样, 一些三参数模型相当于取 $G_1 = \infty$, 同样可以由此建立模型, 简单方便。

如按广义位势理论, 对式 (14) 也可取

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^e &= \frac{1}{K_1} dp, \\ d\varepsilon^e &= \frac{1}{G_2} dq, \end{aligned} \right\} \\ \text{取} \\ \left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^p &= \frac{1}{K_2} dq, \\ d\varepsilon^p &= \frac{1}{G_1} dp, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

这样,

$$\left. \begin{aligned} A &= 0, \\ B &= \frac{1}{K_2}, \\ C &= \frac{1}{G_1}, \\ D &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

将式 (18)、(19) 代入式 (6) 可以建立一种新的模型。当 $G_1 = \infty$, 则 $C = 0$, 代入式 (7) 就可以导出文献[4]的公式, 见文献[39]。

这样, 广义位势理论可以直接拟合试验数据而灵活建立合适的本构模型, 为岩土本构模型的建立提供了新的理论方法。

杨光华等还建立了拟弹塑性的弹塑性本构模型^[39], 并把广义位势理论与剑桥模型结合, 建立了类剑桥模型^[40], 使其适应范围更大, 数学基础更可靠。

4 展望与讨论

岩土分为岩石与土体。目前岩石力学的本构模型远不如土力学研究得深入, 岩石本构模型还停留在传统的理想弹塑性模型阶段, 主要是研究屈服准则、屈服函数, 尚没有依据三轴试验曲线来建模的做法。按传统弹塑性理论建模复杂且存在硬化参数的不确定性, 无法直接拟合试验曲线来建模。广义位势理论提供了新的理论基础, 尤其是对于高围压下岩石具有明显塑性变形特点时, 可考虑利用广义位势理论, 直接根据试验曲线来建模, 值得发展。

土体的本构模型研究相对较深入, 通常有建立于广义胡克定律基础上的增量非线性模型, 相对较简单成熟, 代表性的如 Duncan-Chang 模型, 对一般地基

沉降计算, 如果参数合理, 该模型的计算结果工程上可用。但建立于广义胡克定律基础上的本构模型的最大不足是不能考虑土的剪胀性, 虽发展了一些 $K-G$ 模型, 但构建本构模型矩阵时还是存在理论缺陷, 广义位势理论可解决这个理论缺陷。目前, 在土力学中研究最活跃的还是弹塑性理论模型。弹塑性理论在理论上可以反映土的非线性、弹塑性、压缩剪胀等主要本构特性。最早的本构模型也是建立于弹塑性理论基础上的剑桥模型, 剑桥模型依据较少的试验确定参数, 理论基础好, 较好地反映了土的变形特性, 是一个最为经典的模型, 对土的弹塑性本构模型研究影响最大, 历来的大多数弹塑性本构模型都受该模型思想的影响。弹塑性模型与以广义胡克定律基础上的增量非线性模型比较相对复杂, 且推求塑性势函数及硬化参数较复杂和不确定, 不像增量非线性那样可直接从试验曲线上求参数那样明确可靠, 参数物理意义更明确直接, 计算结果稳定。目前弹塑性模型针对土的特性也进行了很多的修正、改造和发展。如发展了非关联流动性法则, 提出了多重屈服面模型, 屈服参数的运动变化规律, 边界面模型等, 越来越复杂, 但真正能为工程应用的不多, 还是剑桥模型更易应用。近期在商业软件应用的硬化模型 (harding model) 则是结合了试验曲线和多重屈服面模型的弹塑性模型^[45], 是目前应用较为热门的模型, 主要是模型参数有一定的经验性, 且采用了双曲线表达试验曲线, 结合了 Duncan-Chang 模型和弹塑性理论的优点, 这一模型也符合广义位势理论, 用广义位势理论去认识和理解更简便。总体上看, 弹塑性模型的发展目前也遇到瓶颈, 再上台阶已困难重重, 模型的简便性难超剑桥模型, 模型精确性增加又太复杂。对非线性弹性理论, 如柯西理论、格林理论、次弹性理论等, 由于其参数多, 物理意义及数学原理不够详细确定, 应用不多。其实现有的模型研究最终都应归结为: 主空间上的试验和试验曲线的数学拟合, 得到主空间上的本构关系, 然后通过数学变换的方法, 把主空间上的本构关系变换为六维空间上的本构关系, 而这个数学变换就可以采用广义位势理论的方法来实现。现有的建模理论中, 以广义位势理论最具有普遍性, 弹塑性理论、非线性弹性理论等都可作为其特例, 广义位势理论数学原理明确, 结果可靠, 假设清楚, 具有普适性, 并且从数学上统一了现有的建模理论, 形成了一个系统性的建模理论, 可为岩土本构模型的发展提供一个广阔的理论空间, 值得进一步发展应用。

因此, 纵观岩土本构模型现状, 目前主要是遇到了理论瓶颈及岩土特性不适应的问题。必须要在理论上有所突破, 发展适用于岩土特性而又方便应用的本构理论。广义位势理论提供了可能的解决途径。

4.1 关于模型的验证问题

现在较多的模型验证方法是通过室内土样主空间的试验结果与模型计算结果的比较来验证模型的可行性的。其实这样的验证是不够的，因为模型参数是从试验结果提取出来的，只能说明对试验结果的拟合质量。如果从广义位势理论角度看，建立本构模型有两个阶段，第一阶段是数学拟合主空间的试验曲线，第二阶段是把主空间在一定假设条件转换为六维空间上的本构模型。因此，如果用主空间上的试验结果来验证，仅是验证主空间上对试验数据拟合的效果，而使用主空间上不同应力路径的试验结果验证，也只是证明了其主空间上可以反映应力路径的影响，无法检验由主空间到六维空间变换假设的合理性。因此，真正好的验证应是通过本构模型计算一个边值问题，比较边值问题试验与计算结果才是较好的验证，这才是较为全面的验证。

4.2 关于本构模型的参数问题

土的本构模型众多，而目前真正能为工程应用的并不多，关键原因在于模型参数不易确定，或确定的参数不可靠。如目前的本构模型参数主要是靠室内试验确定，对于一些结构性强的天然岩土，由于取样造成的应力释放及扰动影响，取回的样品与现场原状样已发生了改变，这样室内试样的试验结果与现场实际会存在较大的差异，因此按室内试验所得的参数进行工程计算时难以保证计算结果符合实际工程。因而虽然模型众多，但工程可用的却很少。当然对于一个地区的同类问题，如有较多的实测资料，也可以通过反算建立地区土的本构模型参数经验值，这样对同类问题会有不错的效果。同时，由于岩土材料的本构特性复杂，要用一个模型描述其全部的本构特性，不但模型复杂参数众多，一般还要做很多的试验研究，除非重大工程，一般工程无法适用，这也影响了本构模型的推广应用。对于一些简单的受力状态，如地基受垂直荷载作用，甚至大面积堆载则是一个一维压缩问题，这样针对一些简单问题建立相应的简单实用本构模型可能可以更有效地解决工程问题。如对于地基沉降问题，就可以在 Duncan-Chang 模型基础上建立一个很简单的沉降本构模型^[18, 46]。

建立土的切线模量公式：

$$E_t = \left(1 - R_f \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right)^2 E_{t0} \quad (20)$$

泊松比可以直接取为一个常数，如一般土体 $\mu_t = 0.3$ ，软土 $\mu_t = 0.35 \sim 0.45$ 等， R_f 为破坏比，无经验时可取 $R_f = 1$ 。

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (21)$$

E_{t0} 为土的初始切线模量，因模型参数受室内试

验取样扰动的影 响，最好通过压板试验曲线反算确定。设压板试验曲线的初始斜率为 k_0 ，则 $E_{t0} = k_0 D(1 - \mu^2)\omega$ ， D 为压板的直径， ω 为形状系数。

土的强度指标也可以通过压板试验的极限承载力 P_u 反算。如图 5 所示。

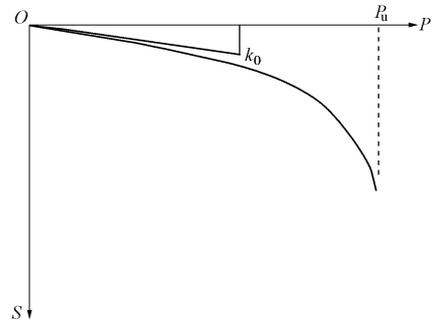


图 5 压板试验的载荷 - 沉降曲线

Fig. 5 Load-settlement curves of plate loading tests

这样，这个模型只有 3 个参数，土的内摩擦角 φ ，黏聚力 c 和土的初始切线模量 E_{t0} 。这 3 个参数可以通过现场原位压板荷载试验求得，也可以通过其他原位试验确定^[47-48]。由式 (20) 计算的 E_t 可以反映土的主要特性：非线性，压硬性，是地基沉降的主要问题。图 7 所示为采用这个模型用数值方法计算一个直径为 79 cm 的压板试验（图 6）的荷载 - 沉降曲线，其与试验结果吻合良好，比理想弹塑性模型更符合实际。

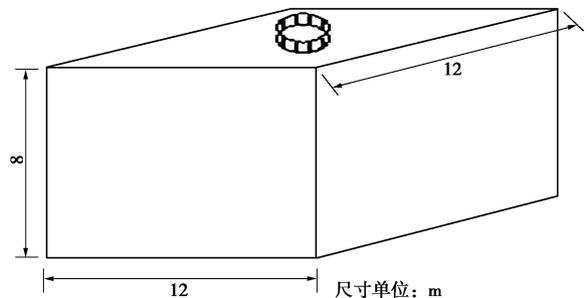


图 6 压板荷载试验数值计算简图

Fig. 6 Numerical calculation of plate loading tests

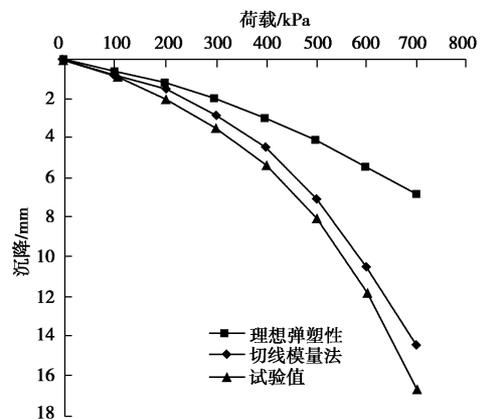


图 7 理想弹塑性模型、切线模量法和实测结果比较

Fig. 7 Comparison among ideal elastic-plastic model, tangent modulus method and measured results

这样的实用模型简单方便,参数易确定,且参数是工程常用参数,物理意义明确,可以通过现场原位试验确定,克服取样扰动的影响,同时参数少,可以方便积累经验,对工程应用是一种高效实用的模型。这种对特定问题建立特定的本构模型可能更有利于工程应用,其精度不亚于一些参数多的精细化模型。因此,要解决“重模型研究,轻模型应用”的问题,发展简单有效的实用模型,提高本构模型计算的准确性,是推动现代土力学理论解决工程的可能途径。

5 结论与建议

(1) 缺乏适用于岩土材料的本构理论制约了岩土本构模型的发展,过去主要是靠修正传统理论来适应,广义位势理论提供了新的解决理论,传统理论是广义位势理论的特例。

(2) 广义位势理论模型可直接拟合试验曲线来建模,具有数学原理清晰,无需推求塑性势函数,建模直接、可靠、方便、通用等特点。

(3) 应建立简便实用模型,使模型理论可靠,参数确定简便可靠,模型应用方便,才能更好地推动现代土力学理论的工程应用,发挥其优势。

(4) 应采用边值问题对模型进行验证,仅靠室内主空间的试验并不能全面验证模型。

(5) 要更好地应用于实际工程,还应解决天然或原位岩土本构模型的参数问题,通常采用取样进行室内试验确定的模型参数与原位岩土参数存在差异,会影响计算结果的可靠性,发展基于原位试验的模型或参数确定方法是值得提倡的。

土的本构理论内容丰富,本文主要是从应用的角度和比较熟悉的方面上提出一些看法,仅供同行参考。

参考文献:

- [1] ROSCOE K H, SCHOFIELD A, THURAIRAJAH A. Yielding of clays in states wetter than critical[J]. *Géotechnique*, 1963, **13**(3): 211 - 240.
- [2] DUNCAN J M, CHANG C Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils[J]. *J Geotech Eng ASCE*, 1970, **96**: 1629 - 1653.
- [3] 高莲士, 汪召华, 宋文晶. 非线性解耦 $K-G$ 模型在高面板堆石坝应力变形分析中的应用[J]. *水利学报*, 2001(10): 1 - 7. (GAO Lian-shi, WANG Zhao-hua, SONG Wen-jin. Application of nonlinear decoupling $K-G$ model in stress and deformation analysis of high concrete face rock fill dam[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2001(10): 1 - 7. (in Chinese))
- [4] 程展林, 丁红顺, 吴良平. 粗粒土试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2007, **29**(8): 1151 - 1158. (CHENG Zhan-lin, DING Hong-shun, WU Liang-ping. Study on coarse grain experiment[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, **29**(8): 1151 - 1158. (in Chinese))
- [5] 潘家军, 程展林, 饶锡保, 等. 一种粗粒土非线性剪胀模型的扩展及其验证[J]. *岩石力学与工程学报*, 2014(S2): 4321 - 4325. (PAN Jia-jun, CHENG Zhan-lin, RAO Xi-bao, et al. An extension and verification of a nonlinear expansive model of coarse grain[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014(S2): 4321 - 4325. (in Chinese))
- [6] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000. (SHEN Zhu-jiang. *Theoretical soil mechanics*[M]. Beijing: China Water Power Press, 2000. (in Chinese))
- [7] 沈珠江. 考虑剪胀性的土和石料的非线性应力应变模式[J]. *水利水运科学研究*, 1986(4): 1 - 14. (SHEN Zhu-jiang. Nonlinear stress-strain model of soil and stone considering dilatancy[J]. *Science Research of Water Resources and Transport*, 1986(4): 1 - 14. (in Chinese))
- [8] 郑颖人. 岩土的多重屈服面理论与应变空间理论[C]// 岩石力学新进展. 1989: 14. (ZHENG Ying-ren. Multi-yield surface theory and strain space theory of rock and soil[C]// *New Advances in Rock Mechanics*. 1989: 14. (in Chinese))
- [9] 沈珠江. 土的三重屈服面应力应变模式[J]. *固体力学学报*, 1984(2): 163 - 174. (SHEN Zhu-jiang. Stress-strain model of soil with triple yield surface[J]. *Journal of Solid Mechanics*, 1984(2): 163 - 174. (in Chinese))
- [10] 沈珠江. 土体应力应变分析中的一种新模型[C]// 第五届土力学及基础工程学术会议论文选集. 厦门, 1990: 101 - 105. (SHEN Zhu-jiang. A new model for stress and strain analysis of soil[J]. *Selected Articles of the Fifth Conference on Soil Mechanics and Basic Engineering*. Xiamen, 1990: 101 - 105. (in Chinese))
- [11] VERMEER P A. A double hardening model for sand[J]. *Géotechnique*, 2015, **28**(4): 413 - 433.
- [12] 殷宗泽. 一个土体的双屈服面应力-应变模型[J]. *岩土工程学报*, 1988(4): 64 - 71. (YIN Zong-ze. Stress-strain model of double yield surface of soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1988(4): 64 - 71. (in Chinese))
- [13] 向大润. 土体弹性理论加载准则和计算模型探讨[J]. *岩土工程学报*, 1983, **5**(4): 78 - 91. (XIANG Da-run. Discussion on loading criterion and calculation model of elastic-plastic theory of soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1983, **5**(4): 78 - 91. (in Chinese))
- [14] 黄文熙. 土的弹性应力-应变模型理论[J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 1979(1): 1 - 26. (HUANG Wen-xi. Elastic-plastic stress-strain model theory of soil[J]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 1979(1): 1 -

26. (in Chinese))
- [15] 黄文熙, 濮家骝, 陈愈炯. 土的硬化规律和屈服函数[J]. 岩土工程学报, 1981, **3**(3): 19 - 26. (HUANG Wen-xi, PU Jia-liu, CHEN Yu-jiong. Hardening rule and yield function of soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1981, **3**(3): 19 - 26. (in Chinese))
- [16] 李广信. 土的清华弹塑性模型及其发展[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(1): 1 - 10. (LI Guang-xin. Tsinghua elastoplastic model of soil and its development[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(1): 1 - 10. (in Chinese))
- [17] 姚仰平. UH 模型系列研究[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(2): 193 - 217. (YAO Yang-ping. Study on UH model series[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(2): 193 - 217. (in Chinese))
- [18] 杨光华. 地基沉降计算的新方法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013. (YANG Guang-hua. New method for calculating foundation settlement and its application[M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese))
- [19] 杨光华. 地基沉降计算新方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, **27**(4): 680 - 685. (YANG Guang-hua. New computation method for soil foundation settlements[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, **27**(4): 680 - 685. (in Chinese))
- [20] GB 50007—2011 建筑地基基础设计规范[S]. 2012. (GB 50007—2011 Code for design of foundation of building foundation[S]. 2012. (in Chinese))
- [21] 杨光华. 岩土类工程材料应力 - 应变本构理论的基本数学问题[C]// 岩土力学数值方法的工程应用——第二届全国岩石力学数值计算与模型实验学术研讨会论文集. 上海, 1990. (YANG Guang-hua. Basic mathematical problems of stress-strain constitutive theory of geotechnical engineering materials[C]// Engineering Application of Numerical Methods for Rock and Soil Mechanics - The Second National Symposium on Numerical Computation and Model Experiment of Rock Mechanics. Shanghai, 1990. (in Chinese))
- [22] 朱 晟, 魏匡民, 林道通. 筑坝土石料的统一广义塑性本构模型[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(8): 1394 - 1399. (ZHU Sheng, WEI Kuang-min, LIN Dao-tong. General generalized plastic constitutive model for dammed soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(8): 1394 - 1399. (in Chinese))
- [23] 王占军, 陈生水, 傅中志. 堆石料的剪胀特性与广义塑性本构模型[J]. 岩土力学, 2015, **36**(7): 1931 - 1938. (WANG Zhan-jun, CHEN Sheng-shui, FU Zhong-zhi. Dilatancy behaviors and generalized plasticity constitutive model of rockfill materials[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(7): 1931 - 1938. (in Chinese))
- [24] 邹德高, 徐 斌, 孔宪京, 等. 基于广义塑性模型的高面板堆石坝静、动力分析[J]. 水力发电学报, 2011(6): 109 - 116. (ZOU De-gao, XU Bin, KONG Xian-jing, et al. A static and dynamic analysis of high-face rockfill dam based on generalized plastic model[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2011(6): 109 - 116. (in Chinese))
- [25] 郭万里, 朱俊高, 彭文明. 粗粒土的剪胀方程及广义塑性本构模型研究[J]. 岩土工程学报, 2017, **39**(8): 1 - 7. (GUO Wan-li, ZHU Jun-gao, PENG Wen-ming. Study on dilatancy equation and generalized plastic constitutive model of coarse-grained soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, **39**(8): 1 - 7. (in Chinese))
- [26] 杨光华. 岩土材料不符合 Drucker 公设的一个证明[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(1): 144 - 146. (YANG Guang-hua. Geotechnical materials do not conform to a proof of Drucker's public utility[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(1): 144 - 146. (in Chinese))
- [27] 杨光华, 李广信. 从广义位势理论的角度看土的本构理论的研究[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(4): 594 - 597. (YANG Guang-hua, LI Guang-xin. Study on the constitutive theory of soil from the perspective of generalized potential theory [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(4): 594 - 597. (in Chinese))
- [28] 杨光华. 岩土类材料的多重势面弹塑性本构模型理论[J]. 岩土工程学报, 1991, **13**(5): 99 - 107. (YANG Guang-hua. Elastic -plastic constitutive model theory of multiple potential of geotechnical materials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1991, **13**(5): 99 - 107. (in Chinese))
- [29] 杨光华. 建立弹塑性本构关系的广义塑性位势理论[C]// 全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会. 成都, 1988. (YANG Guang-hua. The generalized plastic potential theory for the establishment of elastoplastic constitutive relations[C]// Symposium on Numerical Analysis and Analytical Methods for Geotechnical Mechanics. Chengdu, 1988. (in Chinese))
- [30] 杨光华. 岩土类工程材料本构方程的一个张量普遍形式定律[C]// 全国水利水电工程青年学术讨论会. 1993. (YANG Guang-hua. A general law of the tensor of the constitutive equation of geotechnical engineering materials [C]// National Youth Symposium on Water Conservancy and Hydropower Engineering. 1993. (in Chinese))
- [31] 杨光华, 李广信. 岩土本构模型的数学基础与广义位势理论[J]. 岩土力学, 2002, **23**(5): 531 - 535. (YANG Guang-hua, LI Guang-xin. Mathematical basis and generalized potential theory of geoconstitutive model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, **23**(5): 531 - 535. (in Chinese))

- [32] 杨光华, 介玉新, 李广信, 等. 土的多重势面模型及其验证[J]. 岩土工程学报, 1999, **21**(5): 578 - 582. (YANG Guang-hua, JIE Yu-xin, LI Guang-xin, et al. Multi-potential surface model of soil and its verification[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, **21**(5): 578 - 582. (in Chinese))
- [33] 杨光华, 李广信, 介玉新. 土的本构模型的广义位势理论及其应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007. (YANG Guang-hua, LI Guang-xin, JIE Yu-xin. Generalized potential theory of soil constitutive model and its application[M]. Beijing: China Water Power Press, 2007. (in Chinese))
- [34] YANG G H. A new elastoplastic constitutive model for soils[C]// Proceedings of the 1st Conf on Soft Soil Eng. Beijing: Science Press, 1993.
- [35] YANG G H. A new strain space elastoplastic constitutive model for soils[J]. Proceedings of the 2nd Conf on Soft Soil Eng. Nanjing, 1996.
- [36] 杨光华. 岩土塑性本构关系的势函数理论表述问题[C]// 首届全国岩土力学与工程青年工作者学术讨论会论文集. 杭州: 浙江大学出版社, 1992. (YANG Guang-hua. Theoretical expression study on the potential function of the plasticity constitutive relation of rock and soil[C]// The first national symposium on geotechnical and engineering youth workers. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1992. (in Chinese))
- [37] 沈珠江. 土的弹塑性应力应变关系的合理形式[J]. 岩土工程学报, 1980, **2**(2): 11 - 19. (SHEN Zhu-jiang. An reasonable form of elastic-plastic stress-strain relationship of soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1980, **2**(2): 11 - 19. (in Chinese))
- [38] 郑颖人. 岩土塑性力学原理: 广义塑性力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002. (ZHENG Ying-ren. Principles of plasticity of geotechnics: generalized plastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2002. (in Chinese))
- [39] 杨光华, 姚捷, 温勇. 考虑拟弹性塑性变形的土体弹塑性本构模型[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(8): 1496 - 1503. (YANG Guang-hua, YAO Jie, WEN Yong. Elastoplastic constitutive model of soil considering pseudo-elastic plastic deformation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(8): 1496 - 1503. (in Chinese))
- [40] 杨光华, 温勇, 钟志辉. 基于广义位势理论的类剑桥模型[J]. 岩土力学, 2013, **34**(6): 1521 - 1528. (YANG Guang-hua, WEN Yong, ZHONG Zhi-hui. Class cambridge model based on generalized potential theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, **34**(6): 1521 - 1528. (in Chinese))
- [41] 杨林德, 张向霞. 基于广义塑性力学的 Cam-clay 模型的改进[J]. 科学技术与工程, 2005(18): 1282 - 1286. (YANG Lin-de, ZHANG Xiang-xia. Improvement of Cam-clay model based on generalized plastic mechanics[J]. Science Technology and Engineering, 2005(18): 1282 - 1286. (in Chinese))
- [42] 周爱兆, 卢廷浩. 基于广义位势理论的接触面弹塑性本构模型[J]. 岩土工程学报, 2008, **20**(10): 1532 - 1536. (ZHOU Ai-zhao, LU Ting-hao. Elastoplastic constitutive model of contact surface based on generalized potential theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **20**(10): 1532 - 1536. (in Chinese))
- [43] 杨松, 吴珺华, 卢廷浩. 引入饱和度的非饱和土双重势面本构模型[J]. 云南农业大学学报(自然科学), 2015(2): 298 - 302. (YANG Song, WU Jun-hua, LU Ting-hao. Double potential constitutive model of unsaturated soils with saturated saturation[J]. Journal of Yunnan Agricultural University (Natural Science), 2015(2): 298 - 302. (in Chinese))
- [44] 温勇, 杨光华, 汤连生, 等. 基于广义位势理论的土的数值弹塑性模型及其初步应用研究[J]. 岩土力学, 2016, **37**(5): 1324 - 1332. (WEN Yong, YANG Guang-hua, TANG Lian-sheng, et al. Numerical elastic-plastic model of soil based on generalized potential theory and its preliminary application[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, **37**(5): 1324 - 1332. (in Chinese))
- [45] SCHANZ T, VERMEER P A, BONNIER P G. Formulation and verification of the Hardening-Soil Model[C]// Beyond 2000 in Computational Geotechnics. 1999.
- [46] 杨光华, 张玉成, 张有祥. 变模量弹塑性强度折减法及其在边坡稳定分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(7): 1506 - 1512. (YANG Guang-hua, ZHANG Yu-cheng, ZHANG You-xiang. Application of variable modulus elastic-plastic strength reduction method and its application in slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, **28**(7): 1506 - 1512. (in Chinese))
- [47] 杨光华. 地基非线性沉降计算的原状土切线模量法[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(11): 1927 - 1931. (YANG Guang-hua. Nonlinear settlement computation of the soil foundation with the undisturbed soil tangent modulus method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(11): 1927 - 1931. (in Chinese))
- [48] 杨光华, 骆以道, 张玉成, 等. 用简单原位试验确定切线模量法的参数及其在砂土地基非线性沉降分析中的验证[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(3): 401 - 408. (YANG Guang-hua, LUO Yi-dao, ZHANG Yu-cheng, et al. Verify of the tangent modulus method in nonlinear settlement analysis on sandy soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(11): 401 - 408. (in Chinese))