DOI: 10.11779/CJGE201709015

拱坝建基面开挖过程中不平衡力变化及处理效果研究

程 立^{1,2},刘耀儒^{*1},陶灼夫¹,杨 强¹,徐建荣²,何明杰²,张伟狄² (1. 清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室,北京 100084; 2. 水电水利规划设计总院,北京 100120; 3. 中国电建集团华东勘测设计研究院有限公司,浙江 杭州 310014)

摘 要:300 m 级高拱坝建基面开挖造成的岩体卸荷松弛对高拱坝的整体稳定性影响巨大。白鹤滩拱坝左岸建基面开挖 至 628 m 高程时也出现了卸荷松弛、结构面错动等现象。基于变形加固理论,提出了使用不平衡力作为坝基岩体松弛 卸荷的定量判据,阐释了不平衡力分析岩体开裂与坝基卸荷时效松弛的理论基础,通过试验和数值模拟的对比说明了 不平衡力应用于卸荷松弛判据的准确性。使用三维非线性有限元程序 TFINE,对白鹤滩拱坝原始地形和开挖过程进行 精细模拟,分析了开挖过程中建基面基础(尤其是结构面)的卸荷松弛演变过程。分别对无基础处理、预留保护层和 施加锚索情况下的开挖卸荷松弛进行了研究分析。模拟结果表明,在开挖到 630 m 高程时,在结构面交汇处和坡面出 露段附近结构面的不平衡力与屈服区出现集中情况,这与观测到的建基面卸荷松弛以及结构面出现错动裂缝等现象符 合;继续开挖过程中,LS331、LS3318 不平衡力较大,相对比较危险。另外,坝体底部的陡坎开挖成型时,陡坎底部 的不平衡力增加较明显,需减缓陡坎坡度。预留保护层和建基面锚固对控制松弛卸荷作用较小。 关键词:白鹤滩;拱坝建基面;卸荷松弛;不平衡力;锚固;保护层

中图分类号: TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 4548(2017)09 - 1670 - 10 **作者简介:** 程 立(1990 -),男,博士研究生,主要从事水工结构与岩石力学的科研。E-mail: l-cheng12@mails. tsinghua.edu.com。

Variation of unbalanced force during excavation of arch dam base surface and treatment effects

CHENG Li^{1, 2}, LIU Yao-ru¹, TAO Zhuo-fu¹, YANG Qiang¹, XU Jian-rong², HE Ming-jie², ZHANG Wei-di²

(1. State Key Laboratory of Hydroscience and Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. China Renewable

Energy Engineering Institute, Beijing 100120, China; 3. Power China Huadong Engineering Corporation, Hangzhou 310014, China)

Abstract: The excavation-induced relaxation of dam base surface can enormously affect the global stability of 300 m level-high arch dams. Unfortunately, for Baihetan arch dam, serious excavation-induced relaxation and structural plane dislocation are discovered in the left slope when the dam base surface is excavated to the elevation of 628 m. Based on the deformation reinforcement theory, the unbalanced force is used as a quantitative index to evaluate the degree of excavation-induced relaxation of dam base surface. Then, the theoretical basis of rock cracking and relaxation based on the unbalanced force can be analyzed. Simultaneously, the accuracy of using the unbalanced force to evaluate excavation-induced relaxation is illustrated by experiments and numerical simulations. Employing the 3D nonlinear FEM programme TFINE, the excavation-induced relaxation evolution process of the arch dam's left base surface of Baihetan, particularly the shear moving of the structural plane, is elaborated. Three excavation situations are investigated respectively: excavation without foundation treatments, excavation with reserved protective layer and excavation with anchoring. The simulated results show that the unbalanced forces and yield zones of structural planes are concentrated near the intersection zones and outcrops of structural planes, which fit the observations of relaxation of dam base surface and dislocation of structural planes well. LS331 and LS3318 are more dangerous than the other structural planes owing to larger unbalanced force during excavation. The unbalanced force near the scarp bottom obviously increases during excavation of the scarp, so the gradient of the scarp should be slackened. Relatively speaking, reserving the protective layer and setting anchoring have little influence on controlling the excavation-induced relaxation.

Key words: Baihetan; arch dam base surface; excavationinduced relaxation; unbalanced force; anchoring; protective layer

0 引 言

近 20 年来,二滩、小湾、锦屏、溪洛渡等 300 m 级特高拱坝在中国水电资源丰富的西南地区修建,特高拱坝枢纽区一般典型的 V 型河谷,河谷狭窄边坡陡峭,地应力高;拱坝修建中拱间槽的开挖量巨大,开挖中,坝基岩体会产生强烈地松弛卸荷,形成开挖扰动区 (excavation damage zone,简称 EDZ),例如小湾坝基开挖出现剪切错动、所谓"葱皮"现象甚至拱裂岩爆^[1]。拱坝坝基的开挖松弛卸荷及基础处理措施评价已经成为高拱坝岩石力学的核心问题之一。

高拱坝基岩开挖卸荷松弛的研究内容有现场试 验, 声波、微震监测, 数值模拟等。王瑞红等^[2]使用 RMR (岩体分类指数)法对开挖后基岩卸荷松弛进行 评价,分析 RMR 值随开挖卸荷量的关系,进而修正 RMR 评估松弛程度。尹建民等^[3]通过现场钻孔弹测试 分析卸荷松弛深度,并与单孔声波监测结果对比分析。 Sato 等^[4]通过现场试验研究不同开挖施工方式对沉积 岩松弛卸荷扰动深度的影响,得出卸荷松弛深度与开 挖施工方式密切相关,机械开挖相对于爆破开挖能明 显限制扰动区深度。冯学敏等^[5]基于对松弛卸荷的定 性分析,提出岩石极限拉应变的松弛准则,并使用三 维弹黏塑性加锚节理岩体流变模型,对锦屏一级坝基 开挖松弛进行分析,结合开挖揭露和声波测试验证可 行性。张石虎等^[6]结合锚固室内试验和现场试验结果, 提出了一套坝基岩体松弛卸荷和边坡锚固的有限元算 法,进行岩体松弛的时空特征分析。

坝基岩体松弛卸荷不仅是开挖后建基面稳定问题,更与拱坝的整体稳定性紧密相关。周华等^[7]使用 有限元分析小湾拱坝建基面卸荷松弛对坝体变形、应 力、安全系数等稳定性评价指标的影响,评价卸荷松 弛效应。杨保全等^[8]使用模型试验和非线性有限元也 开展了坝基坝肩浅层卸荷对拱坝整体稳定性影响的类 似研究。

白鹤滩水电站位于四川省宁南县和云南省巧家县 交界的金沙江上游,乌东德水电站与溪洛渡水电站之 间。白鹤滩水电站以发电为主,兼顾防洪、拦沙、航 运等功能;水电站装机容量 16000 MW,总库容 206.27 亿 m³,拦河坝为混凝土双曲拱坝,坝顶高程 834 m, 最大坝高 289 m。白鹤滩拱坝左岸坝基高地应力,开 挖工程量巨大,建基面松弛卸荷问题突出。

本文基于变形加固理论,使用集成 OpenMP 并行 的三维非线性有限元程序 TFINE,以不平衡力等作为 指标,研究白鹤滩左岸坝基在开挖过程中,结构面错 动等的松弛卸荷现象及演化规律;评价预设保护层和 建基面锚固等基础处理措施对坝基松弛卸荷的控制作 用;预测白鹤滩左岸建基面开挖卸荷,并提供开挖设 计施工建议,指导设计施工。

1 白鹤滩左岸卸荷松弛特征

1.1 白鹤滩左岸坝基地质特征

白鹤滩拱坝为 300 m 级特高拱坝,枢纽区地质条 件十分复杂。左岸坝基主要为坚硬的玄武岩,坡面基 本为弱风化岩体,完整性较好。左岸 570~660 m 高 程之间出露有柱状节理玄武岩,为柱状镶嵌结构,微 裂隙发育,柱状节理玄武岩为典型的各向异性岩体, 强度、刚度离散性大,这为坝基开挖和坝体的整体稳 定性分析带来较大的困难;左岸河床坝底至 570 m 为 角砾熔岩,法向厚度 6~11 m;如图 1 所示,在枢纽 区发育有较多的结构面,如左岸的错动带 C3、C3-1、 LS331、LS3318、LS3319、LS3319-1,断层 F16、F17 等;其中,LS331、F17、LS3319、LS3318 等在拱间 槽出露。地应力测量结果显示,坝基处于高地应力区, 尤其河床底部附近;且侧压力系数较高,横河向约为 1.5,顺河向约为 1.0,给地应力反演带来较大的困难。



图 1 白鹤滩左岸坝基开挖剖面图



Baihetan arch dam

在白鹤滩勘测设计中,围绕左岸柱状节理玄武岩、 复杂结构面、坝基高地应力等开展了较多的研究^[9-11], 随着认识的不断深入,坝体的体型及开挖方案也发生 较大的变更。

1.2 白鹤滩拱坝体型设计

计算使用的体型方案为白鹤滩拱坝 2014 年招标 阶段体型方案。

在左岸 750~834 m 设置垫座传递拱端推力;左 岸 750 m—河床—右岸 610 m 的拱坝下游设置宽 20 m 的扩大基础作为柱状节理玄武岩区的应力扩散结构; 坝体、扩大基础、垫座为一个混凝土整体。建基面的 最终开挖示意图如图 2 所示。左岸建基面 570~590 m 之间设置 10 m高的斜陡坎,坡度1:0.3;错动带LS331 在陡坎底部出露,陡坎底部—坝底之间的建基面沿着 错动带 LS331 下盘开挖至 538 m 高程。坝底 545 m 高 程设置近似三角形的平台。



图 2 白鹤滩拱坝建基面开挖示意图

Fig. 2 Sketch of excavation of Baihetan dam base surface



图 3 白鹤滩左岸保护层设置与锚杆布置示意图

Fig. 3 Sketch of protective layer and anchoring arrangement of left dam base surface of Baihetan arch dam

1.3 白鹤滩左岸开挖基础处理措施

如图 3 所示, 白鹤滩左岸开挖的基础处理主要采 用预设保护层和布置锚索锚杆。为分析左岸建基面预 设保护层对松弛卸荷的限制作用,本模型模拟了 545~660 m之间的保护层,其中坝底 545 m 至陡坎底 部保护层的法向厚度为 5 m,陡坎处保护层的法向厚 度为 10 m,陡坎顶部至 650 m 保护层的法向厚度为 5 m,650~660 m 之间保护层的法向厚度为 2 m。在 590~700 m 建基面上布置锚索,共布置 6 m 长的锚杆 1855 根,1000 kN 锚索 25 m 长锚索 18 根,1000 kN 锚索 30 m 长锚索 18 根,2000 kN 锚索 40 m 长锚索 29 根,3000 kN 锚索 50 m 长锚索 12 根,3000 kN 锚 索 60 m 长锚索 34 根,合计 232000 kN。

1.4 白鹤滩左岸开挖卸荷松弛宏观特征

2013年9月白鹤滩左岸建基面由坝顶834m高程 开始开挖;2014年8月开挖至680m高程,断层F17 出露;2014年11月开挖至660m高程,LS3319在建 基面开始出露;2014年12月底开挖至628m高程后 开挖停工,此时LS3319已经基本出露。

2014年12月底在现场巡视中发现:建基面 PSL2 排水洞上方680m高程的F17产生裂缝;拱间槽下游

侧坡 690 m 高程的 F17 出现裂缝,宽度约 1~3 cm 并 基本延伸到建基面。建基面上 670~660 m 之间上游 侧混凝土开裂并鼓出,裂缝有扩展趋势。松弛卸荷引 起白鹤滩左岸开挖紧急停工,损失惨重。需要对白鹤 滩左岸边坡开挖松弛特性及稳定性加强监测,进行分 析,并评价预设保护层、锚固布置等基础处理措施的 效果。

2 基于不平衡力的岩体破坏分析

杨强等提出变形加固理论,使用不平衡力、塑性 余能范数等指标评价岩体结构工程的整体稳定性^[12]。

在高拱坝等大型岩体工程的数值模拟中,有限元 方法相对求解简单,使用方便,应用最广。弹塑性有 限元求解有3个基本条件(变形协调条件、平衡方程 和本构关系)及边界条件等定解条件。若能求解出同 时满足3个基本条件的完全解则结构稳定;若问题无 解,则有限元求解不收敛,结构失稳,表现为开裂破 坏。这给有限元等连续介质方法求解岩体的开裂破坏 带来较大的困难。Dhondt等^[13]采用变网格法,随着裂 纹的发展不断分离节点、修改拓扑,这种方法需要预 设裂纹位置,且计算的工作量较大。Bazant等^[14]使用 不变网格法,通过修改开裂区的材料性质、位移插值 或者本构方程等描述开裂,但是该方法无法描述尺寸 效应,也存在计算量大难以工程使用的问题。基于变 形加固理论的不平衡力克服有限元分析求解岩体结构 开裂的不足,可以较好地进行岩体结构开裂分析。

2.1 不平衡力驱动塑性流动

有限元计算中材料稳定需满足最大塑性耗散原理

$$\dot{\sigma} = D : \dot{\varepsilon}^{e} = D : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{p}) \quad (\text{in } V) , \\ D^{p}(\sigma, \dot{\varepsilon}^{p}) \ge D^{p}(\sigma^{yc}, \dot{\varepsilon}^{p}) \quad (\forall f(\sigma^{yc}) \le 0) .$$

$$(1)$$

其中 $\dot{\varepsilon}^{e}$ 和 $\dot{\varepsilon}^{p}$ 分别为弹性和塑性的应变率,D为弹性 张量, σ 为与外荷载平衡的应力场, σ^{v} 为满足屈服 条件的任意应力状态; D^{p} 为塑性耗散, $D^{p}(\sigma^{v},\dot{\varepsilon}_{p}) = \sigma^{v}:\dot{\varepsilon}_{p}$ 。式(1)中的不等式同时涵盖了关联流动法 则和 Kuhn–Tucker 条件。

假设初始时间 t_0 时,应力和塑性应变分别为 σ_0 和 ε_0^{p} ;经过 Δt 时刻,达到新的应力和塑性应变状态 σ 和 ε^{p} ,则

$$\dot{\varepsilon}^{\rm p} = \frac{\Delta \varepsilon^{\rm p}}{\Delta t} = \frac{\Delta \varepsilon - C : (\sigma - \sigma_0)}{\Delta t} = \frac{C : (\sigma^{\rm eq} - \sigma)}{\Delta t}, \quad (2)$$

式中, C 为柔度张量。塑性流动稳定时 $\dot{\varepsilon}^{p}=0$, 定义 此时材料点的弹性试应力为 $\sigma^{eq} = \sigma_0 + C^{-1}$: $\Delta \varepsilon$ 。将式 (2)代入式(1)的最大塑性耗散不等式,求解过程 即转化为式(3)的极小值问题

$$\min E_{\text{mat}}(\sigma^{\text{yc}}) \quad (\forall f(\sigma^{\text{yc}}) \leq 0) , \\ E_{\text{mat}}(\sigma^{\text{yc}}) = \frac{1}{2}(\sigma^{\text{eq}} - \sigma^{\text{yc}}) : C : (\sigma^{\text{eq}} - \sigma^{\text{yc}}) \circ$$

$$(3)$$

式(3)的求解即为弹塑性迭代计算的最近点投影法(CPPM)^[15],式(3)的求解得到的 σ^{x} 即为材料的最大自承力; σ^{eq} 为与外荷载平衡的应力; $\sigma^{eq} - \sigma^{yc}$ 为材料超出屈服面的应力,按照关联流动法则,该应力驱动材料产生塑性流动。

杨强等^[16]推导了基于 Drucker–Prager 准则的应力 转移解析解,该解即为式(3)中 σ^{∞} 的解。求解步骤 已经在三维非线性有限元程序 TFINE 中实现。

在结构层次, σ^{eq} 在全体积上积分 $\int_{V} B^{T} \sigma^{eq} dV$ 即为外荷载的等效节点力; σ^{ye} 在全体积上积分 $\int_{V} B^{T} \sigma^{ye} dV$ 即为结构发挥最大自承力的等效节点力。 两者之差即为结构失稳时的不平衡力

$$F = \sum_{e} \int_{V_e} B^{\mathrm{T}} (\sigma^{\mathrm{eq}} - \sigma^{\mathrm{yc}}) \mathrm{d}V \qquad (4)$$

不平衡力是失稳结构中外荷载与最大自承力之 差,其反力即为结构的最优加固力。定义结构的塑性 余能范数

$$E_{\rm stru}(\sigma^{\rm yc}) = \int_{V} \frac{1}{2} (\sigma^{\rm eq} - \sigma^{\rm yc}) : C : (\sigma^{\rm eq} - \sigma^{\rm yc}) dV \, \, (5)$$

在外荷载一定时, $E_{stru}(\sigma^{vc})=0$ 时,结构稳定, 无不平衡力。 $E_{stru}(\sigma^{vc})>0$ 时,结构失稳,经过弹塑 性迭代计算的应力调整会充分发挥结构的自承力,使 塑性余能范数趋于稳定的最小值,此时结构出现相对 稳定的不平衡力,产生塑性流动。

2.2 不平衡力驱动黏性变形与损伤演化

在应用广泛的黏塑性模型 Perzyna 模型^[17]和 Duvant-Lions 模型^[18]中,明确地指出超屈服力决定黏 塑性应变率。岩石力学计算常用关联流动准则和 Drucker-Prager 准则,Drucker-Prager 准则采用圆锥形 屈服面,此时最近点投影方向即为屈服面的法向,两 种黏塑性流变模型一致;冷旷代^[19]证明了基于最小塑 性余能求得的不平衡力即为两种黏塑性模型中驱动黏 塑性流动的超屈服力。

不平衡力也是材料损伤的驱动力。在损伤演化公 式中常使用累积塑性应变 ε^{p} 作为判断损伤程度、决定 损伤演化方向的指标,例如 Lemaitre 等^[20]进行了大量 损伤试验提出了塑性损伤演化表达式为

$$\dot{\omega} = \frac{K^2}{2ES} \left[\frac{2}{3} (1+\nu) + (1-2\nu) \frac{I_1}{9J_2} \right] \left(\frac{2}{3} \varepsilon^p : \varepsilon^p \right)^{\frac{m+2}{2m}}, \quad (6)$$

式中, $\dot{\omega}$ 为损伤演化率,*S*,*K*,*m*为材料常数,*I*₁为 第一应力不变量,*J*₂为第二偏应力不变量, ε^{p} 为累积 塑性应变。弹塑性计算中,不平衡力决定累积塑性应 变 ε^{p} ,因此不平衡力也直接驱动材料损伤演化。

2.3 不平衡力与岩体开裂破坏

岩体材料的开裂破坏可以解释为: 天然岩体中存 在大量的孔隙、裂隙,外荷载超过结构承载能力时, 不平衡力驱动岩体产生黏塑性变形、损伤演化,材料 内部的缺陷开始起裂,裂纹扩展、贯穿,最终表现为 宏观地开裂,特别适用于脆性材料的岩体。因此,弹 塑性计算得到的不平衡力可以作为岩体结构起裂的重 要指标,不平衡力出现的区域即为可能的起裂区域, 不平衡力的量值反映起裂的程度。图 4,5 分别为杨房 沟拱坝数值计算的不平衡力分布图和地质力学模型试 验坝踵开裂图,图4中曲线越密集表示不平衡力量值 越大,可看到杨房沟右岸坝踵不平衡力分布与裂缝位 置拟合较好。使用不平衡力作为岩体开裂的判据,计 算相对简单、方便,适宜于大型岩体工程的开裂、稳 定性分析。不平衡力与开裂程度普适的定量关系目前 还没有提出,但通过比较不平衡力的量值,可以近似 说明岩体开裂的相对程度。



图 4 杨房沟拱坝坝踵不平衡力等值线分布图

Fig. 4 Sketch of unbalanced force of Yangfanggou dam toe



图 5 杨房沟右岸坝踵裂缝^[21] Fig. 5 Cracks in right dam toe of Yangfanggou^[21]

3 开挖卸荷计算方法与模型

3.1 考虑时效松弛的开挖卸荷模拟方法

经过长期的地球构造作用和水流冲刷,天然边坡 处于临界平衡状态。人工的开挖扰动破坏了天然平衡, 使岩体结构产生不平衡力,不平衡力驱动结构进行非 平衡演化,产生损伤、流变或开裂等。实际监测也表 明工程中开挖卸荷的过程不只是产生弹塑性变形,开 挖区尤其在松弛严重的位置有着明显的时效特征。

与时间无关的弹塑性模型和反映时效的黏塑性模型有深刻的内在联系,存在一定的转换关系。岩土有限元鼻祖 Zienkiewicz 等^[22]早在 20 世纪 70 年代即指出弹塑性分析可转化为黏塑性分析,Yang 等^[23]给出了弹塑性和黏塑性分析内在联系的热力学基础。在卸荷松弛的弹塑性计算中,迭代步可近似为时间步,通过迭代计算使结构的不平衡力趋于稳定值,迭代稳定的不平衡力即可认为是开挖卸荷后考虑时效松弛的不平衡力,不平衡力量值可反映松弛卸荷的程度。本文采用分步应力释放法模拟边坡开挖,以非线性有限元计算产生的不平衡力作为开挖卸荷松弛程度评价指标。

3.2 锚索模拟方法

在岩体工程中,锚索的作用主要有两个方面:锚 索对周围岩体刚度的提高和锚索的预应力作用。

锚索刚度提高是锚索单元以二节点弹性锚索单元 的刚度加入整体刚度矩阵中,在有限元计算中自然实现。锚索的预应力模拟是根据锚固区域锚索布置的密 度和锚固力,将预应力均摊到布锚区域的面积上。设 其预应力为 $F_{\rm B}$,锚杆之间的距离为D。对于布锚区域, 将力平均分摊到其覆盖的面积上,则求得布锚区域的 平均预压力 $\sigma_{\rm B}$ 近似为

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}D^2 ,$$

$$\sigma_{\rm B} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{F}{D^2} ,$$
(7)

对于锚杆穿过区域的所有岩体,将平均预压力 $\sigma_{\rm B}$ 视为此区域的附加应力。在计算锚杆穿过区域的岩体 应力时,在弹塑性有限元计算求得的计算应力基础上 增加平均预压力;并以新的应力进行弹塑性调整。

3.3 有限元模型

为精细模拟白鹤滩左岸建基面开挖卸荷松弛情 况,特采用大范围、小单元精细化网格计算。

本次计算向左岸山里为 X 轴正方向,向下游为 Y 轴正方向,竖直向下为 Z 轴正方向。有限元模型范围 为 700 m×860 m×700 m。横河向范围:模型沿坝轴 中心线向左岸延伸 650 m,向右岸延伸 50 m;顺河向 范围:沿坝轴线向上游延伸 260 m,向下游延伸 600 m; 高程方向范围:海拔 250~950 m。模型采用八节点六 面体和六节点五面体单元,计算更加准确,其中节点 数 353510,单元数 339729。在有限元模型的上游、下 游、右边界、左边界和底部 5 个边界使用简支约束。

模型精细模拟了左岸山体天然边坡和建基面开挖 完成后的工程边坡。图 6 为开挖完成时左岸工程边坡 的有限元网格,模型精确模拟了 570~590 m 的陡坎, 建基面 750 m 垫座平台,上游坡顶 768 m 低供料平台, 834 m坝顶平台等。可模拟由 950 m (天然边坡) 连 续分步开挖至 834 m (坝顶)、800, 768, 750, 720, 700, 680, 660, 640, 630, 620, 610, 600, 590, 570, 560, 550, 545 m (坝底)、538 m (开挖完成) 共 19 步开挖工况。图 7 为模型中结构面分布情况,模拟的 结构面有 C3、C3-1、F16、F17、LS331、LS3319、LS3318、 LS3319-1。有限元模型对地质构造及工程开挖步进行 了精细模拟,模型范围较大;通过对地应力准确反演, 模型合理可靠。



图 6 白鹤滩左岸开挖完成坝基有限元网格

Fig. 6 Finite element mesh of left dam foundation of Baihetan arch dam when excavation is completed





Fig. 7 Distribution of faults and shearing bands in left slope

3.4 材料参数与计算程序

有限元计算使用的材料参数如表1所示,为华东 勘测设计研究院提供的白鹤滩水电站技术施工研究阶 段的设计参数。岩体材料及结构面使用理想弹塑性模 型和 Drucker-Prager 塑性屈服准则。

根据断层和错动带的具体位置进行更细的材料分 区,避免了之前弹塑性计算中单条结构面的材料参数 一刀切,使模拟更加准确。地应力反演、开挖卸荷、 锚固等计算全部在集成 OpenMP 并行的三维非线性有 限元程序 TFINE 中实现,求解更加迅速、精确。TFINE 使用考虑抗拉强度的 Drucker-Prager 塑性屈服准则:

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \leqslant 0 \quad , \tag{8}$$

其中, I_1 , J_2 分别为应力张量的第一不变量和偏应力 张量的第二不变量, $\alpha \pi k$ 为强度参数,与莫尔库仑 准则的摩擦角 φ 和黏聚力c的关系如下

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3}\sin\varphi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\varphi)}} ,$$

$$k = \frac{6\sqrt{3}c\cos\varphi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\varphi)}} .$$
(9)

TFINE 程序集成了变形加固理论,具有很高的收敛性和稳定性,目前已经在高拱坝、岩盐硐室、采矿等领域广泛使用。

表 1 白鹤滩左岸边坡开挖弹塑性计算材料参数

Table 1 Material parameters of elastic-plastic finite element

calculation for excavation of Baihetan left slope						
材料分类	E/GPa	μ	$\gamma/(kN \cdot m^{-3})$	f	c/MPa	
Ⅲ1 类岩石	18.00	0.22	28	1.35	1.55	
Ⅲ2 类岩石	16.00	0.22	28	1.30	1.40	
Ⅲ1 类岩石	11.00	0.24	27	1.15	1.10	
Ⅲ2 类岩石	9.00	0.26	27	1.00	1.05	
IV1 类岩石	4.00	0.30	25	0.70	0.55	
IV2 类岩石	3.00	0.32	25	0.55	0.43	
C3 一区	0.20	0.35	20	0.55	0.25	
C3 二区	0.20	0.35	20	0.45	0.15	
C3 三区	0.20	0.35	20	0.38	0.05	
C3-1 一区	0.10	0.35	20	0.39	0.10	
C3-1 二区	0.10	0.35	20	0.37	0.05	
LS331 一区	2.00	0.35	20	0.70	0.30	
LS331二区	2.00	0.35	20	0.50	0.10	
LS331 三区	0.20	0.35	20	0.45	0.10	
LS3318 — 🗵	0.25	0.35	25	0.50	0.15	
LS3318 二区	0.25	0.35	25	0.39	0.10	
LS3319 — 🗵	0.25	0.35	20	0.50	0.15	
LS3319 二区	0.25	0.35	20	0.38	0.05	
LS3319-1 一区	0.25	0.35	20	0.50	0.15	
LS3319-1 二区	0.25	0.35	20	0.38	0.05	
F16	0.03	0.35	20	0.28	0.04	
F17 弱分化上段	0.04	0.35	20	0.28	0.04	
F17 弱分化下段	0.20	0.35	20	0.38	0.05	
F17 微新岩体	0.20	0.35	20	0.56	0.20	

4 无基础处理的开挖卸荷分析

分析不考虑预留保护层、建基面锚固等基础处理 措施时,左岸坝基的开挖卸荷松弛。采用连续开挖计 算,由天然边坡(坡顶950 m)起,具体开挖步为: 834 m(坝顶);800,768,750,720,700,680,660, 640,630,620,610,600,590,565,560,550,545 m(坝底高程);538 m(全部开挖)共19步。初始地 应力场由华东勘测设计研究院提供的现场测量值反演 得到,地应力反演中选择6个高程的地应力特征点, 初始地应力测量值和反演值对比如表2所示,地应力 反演拟合较好。

4.1 开挖至 630 m 高程松弛卸荷分析

2014年12月巡视发现开挖至628 m高程,左岸 松弛卸荷严重,部分断层出现错动现象。下面以开挖 至630 m高程近似模拟实际开挖至628 m高程来进行 分析,对比计算结果和观测结果。建基面开挖至630 m 高程,左岸坝基边坡屈服区如图8 所示。

表 2 白鹤滩左岸天然边坡地应力测量值与反演值对比

Table 2 Comparison between measured and inversion values of

principal stress of Baihetan natural slope					
言程	主拉应力值对比		主压应力值对比		
间//主 /m	测量值	反演值	测量值	反演值	
	/MPa	/MPa	/MPa	/MPa	
530	3.44	3.61	-10.92	-12.52	
580	3.66	3.32	-8.43	-6.77	
650	3.45	3.20	-5.25	-4.89	
690	2.02	2.29	-3.7	-3.72	
750	0.70	1.46	-2.56	-2.45	
800	0.12	0.48	-1.15	-1.20	



图 8 开挖至 630 m 高程坝基屈服区分布

Fig. 8 Distribution of yield zone in dam foundation when it's excavated to 630 m

断层 F17 与错动带 C3-1 在交汇区相互作用,引 起拱间槽下游侧 720 m 附近临空面部分岩体屈服。这 与现场观测中拱间槽下游侧坡沿 F17 产生裂缝相符; F17 建基面出露段的屈服区没有与下游侧坡塑性区贯 穿,这也与监测情况一致,F17 最大累积剪切变形 6.6 mm,位于 680 m 高程建基面出露段。LS3319 在拱间 槽 630 m 底面开挖出露段有部分屈服,屈服区延伸至 590 m 高程;LS3319 在下游侧 545~570 m 之间有比 较大的塑性区,不平衡力也主要集中于此处,这与临 近边坡表面有关。LS331 在 615 m 高程与 F17 交汇处 有局部屈服,不平衡力也主要集中在该处,此时 LS331 最大累积剪切变形只有 1.3 mm,开挖至 630 m 对 LS331 变形影响较小。F16、C3、LS3318 的屈服区和 不平衡力也主要集中在靠近边坡表面和开挖出露区域 附近。已开挖高程的岩体尤其是结构面卸荷松弛现场 监测结果与计算结果比较吻合。

开挖至 630 m 时,不平衡力较大的结构面为 LS331 (558990 kN)、LS3319 (234680 kN),各断层 与错动带的不平衡力和屈服区主要集中在结构面交汇 处及邻近边坡或开挖面出露区域。结合现场监测成果, 由 630 m 继续向下开挖时应重点关注 LS331、LS3319、 F17 的卸荷松弛情况。

图 9 为开挖至 630 m 高程垂直向位移回弹等值线 图,垂直向回弹位移最大值为26mm,建基面坡脚和 上游 768 m 平台坡脚附近回弹位移大; F17、LS3318、 C3-1 等出露处有明显的位移"间断",表明结构面出 现了错动或开裂。



图 9 开挖至 630 m 高程坝基垂直向回弹位移等值线图 Fig. 9 Contours of springback vertical displacement of dam foundation when it's excavated to 630 m

4.2 开挖过程中不平衡力分析

由天然边坡 950 m 开挖至最底部 538 m 的过程 中,边坡及主要结构面的不平衡力变化如表3所示, 主要结构面的不平衡力总和占边坡所有材料不平衡力 总和的比例在 87%~93%之间, 说明在白鹤滩左岸建 基面开挖中,岩体的不平衡力相对较小(这与白鹤滩 左岸基岩微风化,岩性较好有关),因此需重点关注各 断层和错动带的松弛卸荷情况。天然边坡时, 总不平 衡力为 1779690 kN, 其中 LS331 和 LS3319 的不平衡 力量值占主导:表明天然情况下,基础中 LS331 和 LS3319即有一定程度的破坏。

开挖至 750 m 之前, C3-1 的不平衡力不超过 1000 kN, 可以忽略: 开挖到 720 m 高程, C3-1 的不平衡力 激增到近 60000 kN; 开挖到 630 m 以后 C3-1 的不平 衡力变化基本稳定在 80000 kN。C3-1 的不平衡力与开 挖过程密切相关,在开挖过程中C3-1不断出露,不平 衡力集中在开挖出露段附近,其对 750~680 m 之间 的开挖过程也最为敏感。开挖到 630 m 高程以下, C3-1 不平衡力十分稳定,因此继续向下开挖时不需过分关 注C3-1。

表3 各开挖步边坡的不平衡力变化表

able 3	Variation	of unbalanced	force during	excavation	(10 kN))
		or anounded	10100 0001111			ε.

Table	3 Variation	of unbalanc	ed forc	e during	excavation	on (10 kN)
开挖	边坡不	软弱带不 亚衡力和	C3-1	LS331	LS3319	LS3319-1
 少称	千篑刀和	干倒刀和				
大然 边坡	177969	163229	70	80709	82367	12
开挖	140641	130084	7	59557	70476	8
834 m 开挖	128679	119239	5	52736	66463	7
800 m 开挖	111085	103284	4	45084	58172	4
768 m 开挖	107275	98792	475	42348	55945	4
750 m 开挖	103437	95368	5960	37953	51409	2
720 m 开挖	00210	00554	7214	25(70	47500	2
700 m 开挖	98219	90554	/314	356/9	4/523	1
680 m	94854	87095	7728	36958	42370	0
660 m	93740	85606	7897	42111	35541	1
开挖 640 m	97291	87534	7977	51880	27591	5
开挖 630 m	97930	87497	8032	55899	23468	7
开挖 620 m	100147	88803	8098	61130	19461	11
开挖 610 m	99164	86099	8167	61079	16721	18
开挖 600 m	105844	92546	8069	70884	13436	19
开挖 590 m	112973	99133	7941	82569	8441	24
开挖 570 m	146121	132686	7921	117971	5809	24
开挖 560 m	149666	135595	7926	121003	5687	23
开挖 550 m	134588	120891	7953	110570	1398	24
开挖 545 m	122215	108947	7948	100029	3	23
开挖 538 m	121187	108161	7981	99216	2	23

在开挖过程中,LS331的不平衡力始终很大(这 与LS331为硬质结构面,刚度高,且临近河床底部高 应力区有关)。由天然边坡开挖至 700 m 过程中,由 于边坡巨大的开挖卸荷作用,河床附近 LS331 不平衡 力减小,不平衡力合力由 807090 kN 逐渐减少到 359 790 kN;在 700~600 m 开挖过程中,LS331 不平衡力 缓慢增大: 590 m 开挖至 570 m, LS331 的不平衡力由 825690 kN 激增到 1179710 kN, 而这也是陡坎成型和 LS331 开始出露临空过程。开挖到 560 m 以后, LS331 的总不平衡力开始降低,因为陡坎以下的建基面沿着 LS331 下盘开挖, 部分 LS331 被挖出。

图 10 为 590 m 开挖至 538 m 过程中,建基面某 典型剖面的不平衡力矢量图,可以看到陡坎成型后, 陡坎的底部和建基面坡脚附近出现大的不平衡力集 中。因此,建议将左岸建基面 570~590 m 陡坎坡度 放缓,并加强对 LS331 出露段附近勘测与监测。



(c) 开挖至 550 m(d) 开挖至 538 m图 10 590~538 m 开挖过程中某典型剖面不平衡力矢量图Fig. 10 Graphs of unbalanced force vector of a typical section

during excavation from 590 to 538 m

在开挖过程中,LS3319的不平衡力合力不断减 少,当开挖到最底部538m高程,不平衡力由天然边 坡时823670kN降低到630m高程时的234680kN, 开挖完成时,仅剩余20kN。这与开挖过程中LS3319 含不平衡力区域不断被挖除,未被挖除的错动带区域 风化程度较弱,材料强度较高有关。说明从现状630m 开挖至底部538m过程中,LS3319进一步松弛卸荷的 可能性较小。

错动带 LS3318 在开挖到 560 m之前,不平衡力 和塑性区体积都特别小,基本可以忽略;在陡坎成型 后继续向下开挖时,不平衡力由 500 kN 激增并稳定在 8000 kN。因此,在陡坎成型的过程中需关注 LS3318 的出露区,陡坎成型以后 LS3318 基本稳定。

F17 断层对 660~590 m 高程开挖比较敏感,其不 平衡力主要集中在建基面及拱间槽下游侧面出露段; 开挖 570 m 以后 F17 断层的不平衡力趋于稳定。

F16、LS3319-1、C3 在开挖过程中不平衡力始终 很小,不超过 500 kN,这 3 条结构面整体不会出问题; 但需关注 LS3319-1 的出露面及与其它结构面交汇区 的错动变形情况。

4.3 开挖过程中建基面位移分析

左岸永久建基面中心线上各点在开挖过程中竖向 回弹位移曲线如图 11 所示。开挖高程附近 20 m 内的 测点计算位移对开挖卸荷特别敏感,比开挖面高超过 30 m 的测点卸荷产生的位移对本阶段开挖不敏感。开 挖至 680 m 高程以后,在 680 m 高程的 F17 断层出露 面,有很明显的错动变形,这也是 F17 的最大错动变 形区;在开挖至 570 m 高程以后,在 LS331 出露段也 有特别明显地错动变形。



Fig. 11 Curves of vertical displacement of dam foundation base during excavation

5 基础处理对开挖卸荷影响分析

为保护白鹤滩左岸永久建基面,特预设保护层并 布置锚索限制永久建基面的松弛卸荷程度。

5.1 预设保护层影响分析

设置保护层目的是减小永久建基面岩体的变形和 松弛深度,如图3左岸建基面在545~660 m之间设 置2~10m不等的保护层。即开挖时预留保护层,使 保护层的岩体松弛卸荷,待保护层松弛卸荷稳定后再 挖除保护层,进而起到保护永久建基面的作用。

在弹塑性有限元模拟保护层作用中,即将一步开 挖转为二步开挖。先对不含保护层的岩体开挖进行弹 塑性计算,不平衡力收敛稳定后,再进行保护层岩体 的开挖模拟。本小节以开挖至 620 m 高程为例说明保 护层的作用效果。

开挖至 620 m 高程,无保护层时不平衡力合力为 1001472 kN,设置保护层后不平衡力合力为 991923 kN,降低了 0.95%,其中,LS331 的不平衡力由 611297 kN 降低到 602260 kN,降低了 1.5%;计算结果表明 预设保护层对控制松弛卸荷有一定作用。

Sato 等^[4]通过现场硐室开挖试验证明开挖方式对 松弛程度影响较大;震波反射监测表明爆破开挖的松 弛扰动区约为 0.8~1 m 厚,机械开挖约为 0.3 m 厚; 而实际开挖为加快进度多采用爆破开挖,两种开挖方 式在目前松弛卸荷预测的数值模拟中难以考虑并区 分。因此,建议保留预设保护层方案,在保护层的开 挖中可采用机械开挖、开槽预裂爆破等方式尽量降低 爆破施工对永久建基面的松弛损伤。

5.2 边坡锚固影响分析

锚固区主要分布在左岸建基面 580~700 m之间。 本小节对开挖至 620 m时的锚固效果进行评价。

锚固方案与无锚固方案相比,合位移增量等值线 如图 12 所示,锚固对边坡合位移最大影响 0.6 mm。

开挖至 620 m 高程时,无锚固方案的不平衡力合 力为 1001470 kN,锚固方案不平衡力合力为 992411 kN,降低了 0.91%,其中,LS331 的不平衡力由 611297 kN 降低到 602800 kN,降低了 1.4%。锚固对坝基边 坡整体而言,影响主要集中在锚固区域;锚固作用对 锚固区的位移影响较小,最大为 0.6 mm;对锚固区的 LS331、F17 断层有一定的加固作用。



图 12 开挖至 620 m 高程锚固引起边坡合位移增量图 Fig. 12 Contours of displacement increment resultant by anchoring when it's excavated to 620 m

综上,锚固对白鹤滩坝基开挖的加固作用较小, 这与边坡岩体的屈服区较小没有明显不平衡力分布有 关,建议采用灌浆等方案提高开挖扰动区和相关结构 面的强度。另一方面,由于岩体锚固机理为多因素综 合作用,现有的锚固模拟方法存在低估锚固效果的不 足。因此,此处应进一步加强研究。

6 结 论

基于变形加固理论,阐释了不平衡力分析岩体开 裂、松弛与坝基开挖卸荷的理论基础;结合白鹤滩左 岸坝基开挖工程实例,进行精细化建模,使用三维非 线性有限元程序 TFINE,采用不平衡力分析坝基开挖 过程中松弛卸荷程度及演化,评价预设保护层和建基 面锚固对坝基松弛卸荷的保护。有以下结论:

(1)弹塑性有限元计算得到的不平衡力可认为是 岩体结构产生塑性流动,产生黏性变形与损伤演化的 驱动力。不平衡力的位置和量值可以较好地预测岩体 结构的卸荷松弛、开裂的位置和程度,该方法使用相 对简单。使用不平衡力作为评价坝基边坡开挖松弛卸 荷的定量指标也方便工程应用。 (2) 白鹤滩左岸坝基开挖至 628 m 高程,现场 监测结果与计算结果拟合较好。开挖过程中,不平衡 力主要集中在结构面的交汇处及临近开挖表面附近, 岩体的不平衡力相对较小。LS331、LS3319、C3-1 的 不平衡力相对于其它结构面比较突出; 630 m 高程继 续向下开挖时,需重点关注 LS331 和 LS3318。结构 面的错动开裂是可能主要的破坏形式。开挖高程附近 20 m 内的测点位移对本阶段开挖敏感,比开挖高程高 超过 30 m 的测点位移对本阶段开挖不敏感。

(3) 建基面 570~590 m 之间的陡坎坡度过大, 引起 LS331 在陡坎底部出露段出现很大的不平衡力, 建议将陡坎坡度放缓,并加强开挖过程中陡坎底部 LS331 出露段的勘察与监测。

(4)预设保护层对边坡开挖的整体稳定性影响较小,但可以有效地减少爆破施工等对永久建基面的松弛损伤,建议采用预设保护层,并在保护层开挖时尽量控制永久建基面的爆破损伤。建基面设置锚索对边坡开挖稳定性影响有限,建议通过灌浆等措施提高开挖扰动区岩体与建基面的强度。

参考文献:

- 伍法权,刘 彤,汤献良,等. 坝基岩体开挖卸荷与分带 研究——以小湾水电站坝基岩体开挖为例[J]. 岩石力学与 工程学报, 2009, 28(6): 1091 - 1098. (WU Fa-quan, LIU Tong, TANG Xian-liang, et al. Research on unloading and zonation of rock mass dam foundation excavation—a case study of Xiaowan hydropower station[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(6): 1091 - 1098. (in Chinese))
- [2] 王瑞红,李建林,蒋昱州,等.考虑岩体开挖卸荷边坡岩体质量评价[J].岩土力学,2008,29(10):2741-2746.
 (WANG Rui-hong, LI Jian-lin, JIANG Yu-zhou, et al. Quality evaluation of unloaded slope rock mass[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(10):2741-2746. (in Chinese))
- [3] 尹健民,艾 凯,刘元坤,等. 钻孔弹模法评价小湾水电站坝基岩体卸荷特征[J]. 长江科学院院报, 2006, 23(4): 44 46. (YIN Jian-min, AI Kai, LIU Yuan-kun, et al. Unloading characteristic evaluation of Xiaowan Hydropower Station foundation rock mass by borehole elasticity modulus method[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2006, 23(4): 44 46. (in Chinese))
- [4] SATO T, KIKUCHI T, SUGIHARA K. In-situ experiments on an excavation disturbed zone induced by mechanical excavation in Neogene sedimentary rock at Tono mine, central Japan[J]. Engineering Geology, 2000, 56(1): 97 - 108.
- [5] 冯学敏,陈胜宏,李文纲. 岩石高边坡开挖卸荷松弛准则 研究与工程应用[J]. 岩土力学, 2009, 30(增刊 2): 452 - 456.

(FENG Xue-min, CHEN Sheng-hong, LI Wen-gang. Research on unloading relaxation criterion of high rocky slope excavation and its engineering application[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(S2): 452 – 456. (in Chinese))

- [6] 张石虎,傅少君,陈胜宏.坝基岩体开挖松弛效应分析与 锚固效果评估研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(3): 514 - 522. (ZHANG Shi-hu, FU Shao-jun, CHEN Sheng-hong, et al. Research analysis of excavation-induced relaxation of rock foundation and evaluation of anchor effect[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, 33(3): 514 - 522. (in Chinese))
- [7] 周 华, 王国进, 傅少君, 等. 小湾拱坝坝基开挖卸荷松 弛效应的有限元分析[J]. 岩土力学, 2009, 30(4): 1175 -1180. (ZHOU Hua, WANG Guo-jin, FU Shao-jun, et al. Finite element analysis of foundation unloading and relaxation effects of Xiaowan arch dam[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(4): 1175 - 1180. (in Chinese))
- [8] 杨宝全,张林,胡成秋,等.复杂岩基上高拱坝坝基坝肩 浅层卸荷影响与稳定性研究[J].四川大学学报(工程科学 版), 2011, 43(5): 71 - 76. (YANG Bao-quan, ZHANG Lin, HU Cheng-qiu, et al. Study on influence of dam foundation shallow unloading and stability of high arch dam with complicated rock foundation[J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2011, 43(5): 71 - 76. (in Chinese))
- [9] 江 权, 冯夏庭, 樊义林, 等. 柱状节理玄武岩各向异性 特性的调查与试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(12): 2527 - 2535. (JIANG Quan, FENG Xia-ting, FAN Yi-lin, et al. Survey and laboratory study of anisotropic properties for columnar jointed basaltic rock mass[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(12): 2527 - 2535. (in Chinese))
- [10] 闫东旭, 徐卫亚, 王 伟, 等. 柱状节理岩体宏观等效弹性 模量尺寸效应研究[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(2): 243 - 250. (YAN Dong-xu, XU Wei-ya, WANG Wei, et al. Research of size effect on equivalent elastic modulus of columnar jointed rock mass[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 34(2): 243 - 250. (in Chinese))
- [11] 金长宇, 冯夏庭, 张春生. 白鹤滩水电站初始地应力场研 充分析[J]. 岩土力学, 2010, 31(3): 845 - 850. (JING Chang-yu, FANG Xia-ting, ZHANG Chun-sheng. Research on initial stress field of Baihetan hydropower station[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(3): 845 - 850. (in Chinese))
- [12] 杨 强,冷旷代,刘耀儒.变形加固理论的力学基础与工程 意义[J]. 岩土力学, 2011, **32**(1): 1-8. (YANG Qiang, LENG Kuang-dai, LIU Yao-ru. Mechanical basis and engineering

significance of deformation reinforcement theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(1): 1 – 8. (in Chinese))

- [13] DHONDT G Automatic 3-D mode I crack propagation calculations with finite elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 41(4): 739 - 757.
- [14] BAZANT Z P, CEDOLIN L. Blunt crack band propagation in finite element analysis[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1979, 105(2): 297 – 315.
- [15] SIMO J C, KENNEDY J G, GOVINDJEE S. Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity loading/unloading conditions and numerical algorithms[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1988, 26(10): 2161 – 2185.
- [16] 杨 强,陈 新,周维垣. 基于 DP 准则的三维弹塑性有限元增量计算的有效算法[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(1):
 16-20. (YANG Qiang, CHEN Xin, ZHOU Wei-yuan. A practical 3D elastio-plastic incremental method in FEM based on D-P yield criteria[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(1): 16-20. (in Chinese))
- [17] PERZYNA P. Fundamental problems in viseoplasticity[J]. Advances in Applied Mechanics, 1966, 9: 243 - 377.
- [18] DUVAUT G, LIONS J L. Inequalities in mechanics and physics[M]. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1976.
- [19] 冷旷代. 岩体结构非平衡演化稳定与控制理论基础研究
 [D]. 北京: 清华大学, 2013. (LENG Kuang-dai. Research on the fundamentals of stability and control of non-equilibrium evolution of rock mass structures[D]. Beijing: Tsinghua University, 2013. (in Chinese))
- [20] LEMAITRE J, CHABOCHE J L. Mechanics of solid materials[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [21] 张 泷, 刘耀儒, 杨 强, 等. 杨房沟拱坝整体稳定性的 三维非线性有限元分析与地质力学模型试验研究[J]. 岩土 工程学报, 2013, 35(1): 239 - 246. (ZHANG Long, LIU Yao-ru, YANG Qiang, et al. Global stability of Yangfanggou arch dam by 3D nonlinear FEM analysis and geomechanical model tests[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(1): 239 - 246. (in Chinese))
- [22] ZIENKIEWICZ O C, CORMEAU I C. Visco-plasticity and creep in elastic solids—a unified numerical solution approach[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1974, 8(4): 821 - 845.
- [23] YANG Q, LIU Y R, FENG X Q, et al. Time-independent plasticity related to critical point of free energy function and functional[J]. Journal of Engineering Materials & Technology, 2014, 136(2): 162 - 175.