

DOI: 10.11779/CJGE201708012

剪胀性砂土中球孔扩张弹塑性解

李 林^{1, 2}, 李镜培^{*1, 2}, 孙德安³, 李险峰^{1, 2}

(1. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 3. 上海大学土木工程系, 上海 200444)

摘 要: 目前砂土中球孔弹塑性扩张解无法合理考虑砂土的峰值强度和剪胀特性, 因而其解答与实际情况存在一定偏差。为得出剪胀性砂土中球孔扩张问题的合理解答, 采用砂土临界状态模型考虑球孔扩张过程中砂土剪胀特性和峰值强度对球孔扩张机制的影响, 基于相关联流动法则推导了球孔扩张问题的弹塑性本构张量, 进而在塑性区采用大变形理论并引入辅助变量, 将球孔扩张问题归结为基于拉格朗日描述的一阶偏微分方程组的初值问题。在此基础上, 结合孔周弹塑性边界条件求解得出了剪胀性砂土中球孔扩张问题的严格解答。通过与基于修正剑桥模型的球孔扩张解答相对比, 研究了砂土峰值强度和剪胀特性对孔周土体应力状态和位移的影响规律。结果表明, 基于砂土临界状态模型的弹塑性解答不仅可以合理反映球孔扩张过程中剪胀性砂土的峰值强度和剪胀特性, 而且可退化为非剪胀性土体中的球孔扩张解答, 因而可以更加广泛地应用于静力触探、静压沉桩等岩土工程问题中。

关键词: 峰值强度; 剪胀性; 球孔扩张; 辅助变量; 拉格朗日描述

中图分类号: TU 473

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 4548(2017)08 - 1453 - 08

作者简介: 李 林 (1986 -) 男, 甘肃通渭人, 博士研究生, 主要从事土体力学特性和桩基承载力方面的研究工作。

E-mail: lilin_sanmao@163.com.

Elasto-plastic solution to expansion of a spherical cavity in dilatant sand

LI Lin^{1, 2}, LI Jing-pei^{*1, 2}, SUN De-an³, LI Xian-feng^{1, 2}

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: The current solutions to spherical cavity expansion can not properly consider the peak strength and dilatancy of the sand, and thus there is some discrepancy between the solution and the practical situation. To obtain a rational solution to expansion of a spherical cavity in sand, a critical state model for sand is adopted to consider the effects of the peak strength and dilatancy of the soil on the cavity expansion. Based on the critical mode, the elasto-plastic constitutive tensor for the problem is derived according to the associated flow rule. By employing the large deformation theory and introducing an auxiliary variable, the problem becomes an initial value problem of a set of first-order differential equations based on the Lagrangian description. Under the elastic-plastic boundary conditions, a rigorous solution is obtained by solving the governing equations numerically. The effects of the peak strength and dilatancy of the sand on the expansion response are studied by comparing the results between the present solution and the modified Cam-clay model-based solution. The results show that the present solution can appropriately reflect the peak strength and dilatancy of the sand during cavity expansion and be reduced to the solution for non-dilatant soils. Hence, the present solution can be widely applied to the geotechnical problems, such as the cone penetration tests and the pile installation.

Key words: peak strength; dilatant behaviour; spherical cavity expansion; auxiliary variable; Lagrangian description

0 引 言

球孔扩张理论具有形式简单、力学原理明确, 可应用多种土体本构模型求解等优点^[1-2], 因而被广泛应用于静力触探、静压沉桩及桩基承载力等岩土工程问题研究^[3-5]。然而, 受岩土本构理论的限制, 早期多数球孔扩张解答假设土体为理想弹塑性材料, 近似认为

在球孔扩张过程中土体力学行为独立于土体当前应力和应变状态, 如 Vesic^[6]、Carter 等^[7]、Yu 等^[8]、Mantaras 等^[9]采用 Mohr-Coulomb 强度准则和非相关联的流动

基金项目: 国家自然科学基金项目 (41272288)

收稿日期: 2016 - 05 - 15

*通讯作者 (E-mail: lijingpei@tongji.edu.cn)

法则来描述土体的塑性行为，基于理想弹塑性假设推导了圆孔扩张问题的弹塑性解答，并通过简单的数值方法计算得到了圆孔的压力 - 扩张关系。由于以上解答均基于非相关联流动法则和理想弹塑性假设，因此在圆孔扩张过程中无法考虑土体剪胀角和强度随土体应力和应变状态的变化，进而无法合理体现孔周土体的力学响应。

为合理考虑圆孔扩张过程中土体力学特性随其应力和应变状态的变化，临界状态模型被广泛应用于圆孔扩张解答，如：Palmer^[10]、Cao等^[11]、Sathanathan等^[12]、Li等^[13]、肖昭然等^[14]、刘维正等^[15]采用修正剑桥模型(MCC)和大变形理论描述土体的力学行为，通过简化孔周塑性区应力-应变关系推导了圆孔不排水扩张的近似解析解；Vincenzo等^[16]、Chen等^[17]、Li等^[18]采用各向异性修正剑桥模型描述天然饱和黏土的力学行为，基于严格的本构关系推导了初始应力各向异性土体中圆孔不排水扩张的半解析解。Collins等^[19]、Collins等^[20]、Collins等^[21]、Osinov等^[22]、Russell等^[23]、蒋明镜等^[24]采用临界状态模型来考虑土体的应变硬化/软化特性，推导了排水/不排水条件下零初始半径圆孔扩张问题的相似渐近解。上述基于临界状态模型的圆孔扩张解答具有较大的理论意义，但由于临界状态本构模型的复杂性，目前众多圆孔扩张问题的弹塑性解答均存在一定程度的简化和近似，特别相对于饱和黏土中的圆孔不排水扩张问题而言，砂土中圆孔排水扩张问题需考虑孔周土体的体应变，使得严格基于临界状态模型的弹塑性解答更加难以得出。此外，目前多数圆孔扩张弹塑性解无法考虑砂土峰值强度和剪胀特性对圆孔扩张机制的影响，使得理论解答与实际情况存在一定程度的偏差。

本文针对剪胀性砂土中的球孔排水扩张问题，采用Yao等^[25-26]提出的可以考虑砂土峰值强度和剪胀特性的砂土临界状态本构模型描述孔周土体的弹塑性行为，推导了剪胀性砂土中球孔排水扩张问题的弹塑性本构张量，通过引入辅助变量并结合大变形理论得出了该问题的半数值半解析严格解。本文解答为应用复杂临界状态模型求解圆孔扩张问题提供了新思路、新方法，可应用于剪胀性砂土静力触探和静压沉桩等岩土问题的研究中，对完善和丰富圆孔弹塑性扩张理论具有一定的理论意义。

1 问题定义与砂土本构模型

1.1 球孔扩张问题基本定义

如图1所示，假定一初始半径为 a_0 的球孔在初始应

力为 p_0 的均质剪胀性砂土中排水扩张，在孔径从 a_0 扩张至 a 的过程中，孔壁扩张压力从 p_0 增至 σ_{ra} ，随着扩张压力的逐渐增加，孔壁土体首先屈服进入塑性状态，进而在孔周形成一半径为 r_p 的塑性区。图中： U_{rp} 代表弹塑性边界处的土体位移， r_{p0} 代表弹塑性边界上一点的初始径向位置， r_0 和 r 分别表示孔周任一点扩张前后所处径向位置。假定土体应力和应变以压为正，且文中所有应力均表示有效应力。

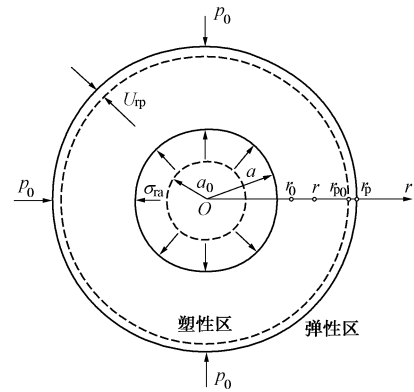


图1 球孔扩张示意图

Fig. 1 Schematic diagram of spherical cavity expansion

1.2 砂土临界状态模型

Yao等^[25-26]提出的砂土临界状态模型可以考虑剪胀性砂土的峰值强度和剪胀特性，其采用相关联流动法则，且屈服准则和塑性势方程与修正剑桥模型一致：

$$f = \left(\frac{\eta}{M} \right)^2 - \frac{p_c}{p} + 1 = 0 \quad (1)$$

式中 η 为应力比， $\eta = q/p$ ， p 为平均总应力， $p = \sigma_{ii}/3$ ， q 为偏应力， $q = \sqrt{3(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})}/2$ ， σ_{ij} 为应力张量， δ_{ij} 为克朗内克符号； p_c 为土体等向压缩条件下的屈服应力； M 为特征状态应力比。

与剑桥模型不同的是，砂土临界状态模型构造了一个与应力路径无关的硬化参数 H 代替修正剑桥模型中的硬化参数-塑性体应变 ϵ_v^p 作为“状态变量”来考虑砂土剪切过程中的峰值应力比和剪胀特性，其硬化参数 H 可表示为

$$H = \int dH \int \frac{M^4}{M_f^4} \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\epsilon_v^p \quad (2)$$

式中 M_f 为砂土峰值应力比； ϵ_v^p 为塑性体应变。

变换式(2)可得

$$d\epsilon_v^p = \frac{M_f^4}{M^4} \frac{M^4 - \eta^4}{M_f^4 - \eta^4} dH \quad (3)$$

由于硬化参数增量 $dH \geq 0$ ，故从式(3)可知：当 $0 < \eta < M$ 时 $d\epsilon_v^p > 0$ ，表示土体剪缩；当

$M < \eta < M_f$ 时 $d\varepsilon_v^p < 0$, 表示土体剪胀; 当 $\eta = M$ 时 $d\varepsilon_v^p = 0$, 表示土体处于特征状态; 当 $\eta = M_f$ 时 $d\varepsilon_v^p = 0$, 表示土体进入临界状态。此外, 当 $M = M_f$ 时 $dH = d\varepsilon_v^p$, 砂土临界状态模型退化为修正剑桥模型。可见, 引入硬化参数 H 后, 砂土临界状态模型便可以合理描述砂土剪切过程中的剪胀/剪缩特性, 其屈服方程可进一步表示为

$$f = c_p \ln \frac{p}{p_0} + c_p \ln \left[1 + \left(\frac{\eta}{M} \right)^2 \right] - H = 0 \quad (4)$$

式中 $c_p = (\lambda - \kappa)/(1 + e_0)$; e_0 为土体初始孔隙比; λ 和 κ 分别为各向同性加荷和卸荷曲线在 $v - \ln p$ 平面上的斜率。

2 球孔扩张解答

2.1 弹性区解答

在球孔扩张过程中孔周任一土体单元均满足如下平衡方程:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (5)$$

弹性区采用胡克定律表述土体的弹性应力 - 应变关系:

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1 + \nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{mm} \delta_{ij} \quad (6)$$

由式 (5)、(6) 可推得弹性区的应力分量和位移解答^[1]:

$$\sigma_r = p_0 + (\sigma_\eta - p_0) \left(\frac{r_p}{r} \right)^3, \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = p_0 - \frac{1}{2} (\sigma_\eta - p_0) \left(\frac{r_p}{r} \right)^3, \quad (8)$$

$$U_r = \frac{\sigma_\eta - p_0}{4G_0} \left(\frac{r_p}{r} \right)^3 r, \quad (9)$$

式中, σ_η 为弹塑性边界处的径向应力。

2.2 塑性区分析

孔壁土体屈服后, 孔周塑性区范围内土体总应变增量 $d\varepsilon_{ij}$ 由弹性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^e$ 和塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 两部分组成:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p, \quad (10)$$

式中, 弹性应变增量采用式 (6) 计算, 由砂土临界状态模型和相关联流动法则, 塑性应变增量可采用下式计算:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (11)$$

式中, Λ 为塑性因子。

由塑性一致性条件和式 (4) 可推得:

$$\Lambda = \frac{M_f^4 M^4 - \eta^4}{M^4 M_f^4 - \eta^4} \left(\frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{3\eta_{ij}}{M^2 - \eta^2} \right) d\sigma_{ij}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{c_p}{p} \left(\frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{3\eta_{ij} - \eta_{kl}\eta_{kl}\delta_{ij}}{M^2 + \eta^2} \right), \quad (13)$$

式中, $\eta_{ij} = (\sigma_{ij} - p\delta_{ij})/p$ 。

将式 (12)、(13) 代入式 (11) 可得

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{c_p}{p^3} \frac{M_f^4 (M^2 + \eta^2)^2}{M^4 (M_f^4 - \eta^4)} \left(\frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{3\eta_{ij} - \eta_{kl}\eta_{kl}\delta_{ij}}{M^2 + \eta^2} \right)^2 d\sigma_{ij}. \quad (14)$$

由式 (6)、(14) 结合球孔扩张问题的对称性, 可将孔周土体的弹塑性本构关系采用拉格朗日方法表示为

$$\begin{Bmatrix} D\varepsilon_r \\ D\varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} + SS_r^2 & -\frac{2\nu}{E} + 2SS_r S_\theta \\ -\frac{\nu}{E} + SS_r S_\theta & \frac{1-\nu}{E} + 2SS_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D\sigma_r \\ D\sigma_\theta \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

式中 $D\varepsilon_r$, $D\varepsilon_\theta$ 和 $D\sigma_r$, $D\sigma_\theta$ 分别为基于拉格朗日方法描述的孔周土体沿径向和环向的应变增量和应力增量;

$$S_r = \frac{1}{3} + \frac{3\eta_r - \eta_{kl}\eta_{kl}}{M^2 + \eta^2}, \quad (16a)$$

$$S_\theta = \frac{1}{3} + \frac{3\eta_\theta - \eta_{kl}\eta_{kl}}{M^2 + \eta^2}, \quad (16b)$$

$$S = \frac{c_p}{p} \frac{M_f^4 (M^2 + \eta^2)^2}{M^4 M_f^4 - \eta^4}. \quad (16c)$$

由球孔扩张问题的对称性, 可将球孔扩张过程中孔周土体的体应变增量表示为

$$D\varepsilon_v = -\frac{Dv}{v} = D\varepsilon_r + 2D\varepsilon_\theta, \quad (17)$$

式中, v 为土体比体积。

将式 (17) 代入式 (15), 同时对式 (15) 求逆, 则可将孔周土体的应力增量以应变增量表示为

$$D\sigma_r = \frac{1}{N} \left[N_{11} \left(-\frac{Dv}{v} \right) + (N_{12} - 2N_{11}) D\varepsilon_\theta \right], \quad (18a)$$

$$D\sigma_\theta = \frac{1}{N} \left[N_{21} \left(-\frac{Dv}{v} \right) + (N_{22} - 2N_{21}) D\varepsilon_\theta \right], \quad (18b)$$

式中,

$$N_{11} = E(2ESS_\theta^2 + 1 - \nu), \quad (19a)$$

$$N_{12} = 2E(\nu - ESS_r S_\theta), \quad (19b)$$

$$N_{21} = E(\nu - ESS_r S_\theta), \quad (19c)$$

$$N_{22} = E(ESS_r^2 + 1), \quad (19d)$$

$$N = ESS_r^2(1 - \nu) + 4E\nu SS_r S_\theta + 2ESS_\theta^2 + 1 - \nu - 2\nu^2. \quad (19e)$$

采用对数应变考虑孔周塑性区的大变形:

$$\varepsilon_r = -\ln \frac{dr}{dr_0}, \quad (20a)$$

$$\varepsilon_\theta = -\ln \frac{r}{r_0}. \quad (20b)$$

由于球孔扩张问题的本构关系式(18)为拉格朗日描述,而平衡方程式(5)和对数应变式(20a)、(20b)均为欧拉描述,因此需将式(5)和式(20)转变为拉格朗日表述。为此,引入辅助变量 ξ :

$$\xi = \frac{U_r}{r} = \frac{r-r_0}{r}. \quad (21)$$

将式(21)代入式(5)、(20a)、(20b),则可将平衡方程式和对数应变以拉格朗日方法分别表述为

$$\frac{D\sigma_r}{D\xi} \left(-\frac{U_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_r}{dr} \right) + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (22)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_v - 2\varepsilon_\theta = \ln \left(\frac{v_0}{v(1-\xi)^2} \right), \quad (23a)$$

$$\varepsilon_\theta = \ln(1-\xi). \quad (23b)$$

联立式(18)、(22)、(23a)、(23b)可得砂土中球孔扩张问题的控制方程:

$$\frac{D\sigma_r}{D\xi} = -\frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{1-\xi - v_0/[v(1-\xi)^2]}, \quad (24a)$$

$$\frac{D\sigma_\theta}{D\xi} = \frac{B_{21}}{B_{11}} \left\{ \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{1-\xi - v_0/[v(1-\xi)^2]} + \frac{2B_{11} - B_{12}}{B(1-\xi)} \right\} - \frac{B_{22} - 2B_{21}}{B(1-\xi)}, \quad (24b)$$

$$\frac{Dv}{D\xi} = \frac{Bv}{B_{11}} \left\{ \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{1-\xi - v_0/[v(1-\xi)^2]} + \frac{2B_{11} - B_{12}}{B(1-\xi)} \right\}. \quad (24c)$$

式(24a)~(24c)基于拉格朗日描述方法将球孔扩张问题归结为关于 σ_r 、 σ_θ 和 v 的一阶常微分方程组初值问题,其在孔周塑性区内均成立。由于 σ_r 、 σ_θ 和 v 均为单一辅助变量 ξ 的函数,故给定相应的初始条件,便可通过数值方法求解此一阶常微分方程组。

2.3 定解条件

由式(7)、(8)可知弹性区内土体平均应力 p 保持不变,根据应力连续条件可得弹塑性边界处平均应力 p_p :

$$p_p = p_0. \quad (25)$$

将式(25)代入屈服方程式(1),可得弹塑性边界处应力比 η_p :

$$\eta_p = M\sqrt{\text{OCR} - 1}, \quad (26)$$

式中, $\text{OCR} = p_c/p_0$ 为土体各向等压条件下的超固结比。

基于 η 定义,将式(7)、(8)代入式(26),可得弹塑性边界处的径向应力 σ_{rp} 和切向应力 $\sigma_{\theta p}$:

$$\sigma_{rp} = p_0 \left(1 + \frac{2}{3} \eta_p \right), \quad (27a)$$

$$\sigma_{\theta p} = p_0 \left(1 - \frac{1}{3} \eta_p \right). \quad (27b)$$

由式(6)、(25)可知土体弹性阶段比体积 v 亦保持不变,基于变形连续条件可得弹塑性边界处比体积 v_p :

$$v_p = v_0. \quad (27c)$$

同时,将式(27a)代入式(9)并结合辅助变量定义式(21)可得弹塑性边界处位移:

$$\xi_p = \frac{\sigma_{rp} - p_0}{4G_0}. \quad (27d)$$

从式(27a)~(27d)可看出,弹塑性边界处的应力、体应变及辅助变量均独立于径向位置,故式(27a)~(27d)可直接作为求解控制方程组(24a)~(24c)的初始条件。

2.4 方程求解

根据式(27a)~(27d)提供的初始条件,一阶常微分方程组(24a)~(24c)可通过数值方法求解。本文基于MATLAB计算软件用于求解微分方程组的功能函数ODE45编写相应计算程序对控制方程组求解。

如前所述,由于方程组(24a)~(24c)采用拉格朗日表述,故求解得出的 σ_r 、 σ_θ 和 v 为单一辅助变量 ξ 的函数。因此,在通过数值方法求解控制方程组(24a)~(24c)后,须将计算结果变换为关于径向位置 r 的欧拉描述,具体变换方法如下:

联立式(20a)、(23a)可得

$$\frac{dU_r}{dr} = 1 - \frac{v_0}{v(1-\xi)^2}. \quad (28)$$

对辅助变量定义式(21)求微分,并将式(28)代入,整理可得

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\xi}{1-\xi - v_0/[v(\xi)(1-\xi)^2]}. \quad (29)$$

积分式(29),则可得辅助变量 ξ 与欧拉坐标 r 之间的关系式:

$$\frac{r}{a} = \exp \left\{ \int_{\xi(a)}^{\xi} \frac{d\xi}{1-\xi - v_0/[v(\xi)(1-\xi)^2]} \right\}. \quad (30)$$

积分式(29)从孔壁 ξ_a 至塑性区半径 ξ_p ,可得球孔扩张过程中塑性区半径 r_p :

$$\frac{r_p}{a} = \exp \left\{ \int_{\xi(a)}^{\xi_p} \frac{d\xi}{1-\xi - v_0/[v(\xi)(1-\xi)^2]} \right\}. \quad (31)$$

至此,基于砂土临界状态模型的球孔排水扩张解答已完整得出。

3 算例验证与讨论

本文所采用的砂土临界状态模型当 $M=M_f$ 时退化为修正剑桥模型。若 $M=M_f$ 时本文解答与基于 MCC 模型的解答相同, 则可间接验证本文解答的正确性。同时, 通过对比 $M \neq M_f$ 时本文解答与基于 MCC 模型解答的异同, 可体现本文解答考虑砂土峰值强度和剪胀特性的优点。因此, 为验证和讨论本文解答的合理性和创新性, 将本文解答与基于 MCC 模型的球孔扩张解答进行对比, 以研究砂土剪胀性和峰值应力比对球孔扩张机制的影响。表 1 参考文献[25~28]总结给出了本次计算所需参数, 表中 3 组数据分别对应于松散无剪胀性砂土, 剪胀性中密砂土和剪胀性密实砂土。

表 1 不同种类砂土参数

Table 1 Parameters for different types of sand

峰值应力 比 M_f	特征状态 应力比 M	固结比 OCR	平均应力 p_0/kPa	剪切模量 G_0/kPa	比体积 v_0
1.20	1.2	1.2	120	5374	1.94
1.66	1.2	3.0	120	5094	1.83
1.79	1.2	7.0	120	4836	1.75

各向同性加荷、卸荷曲线斜率: $\lambda = 0.13, \kappa = 0.02$; 泊松比 $\nu = 0.3$

根据表 1 所列参数, 球孔扩张半径与扩张压力之间的关系曲线如图 2 所示。图中扩张半径 a 和扩张压力 σ_{ra} 分别采用初始孔径 a_0 和初始应力 p_0 无量纲化表示。

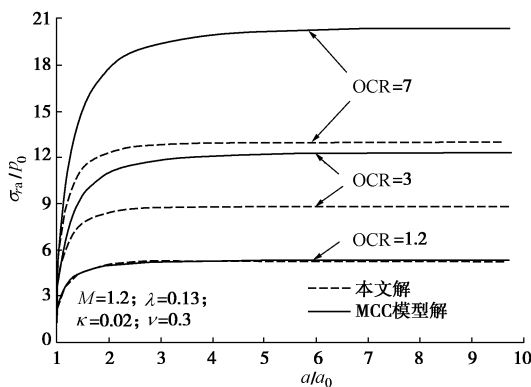


图 2 不同砂土中球孔扩张半径与扩张压力关系

Fig. 2 Variation of expansion pressure with spherical cavity radius for different types of sand

从图 2 可见, 本文解答与基于 MCC 模型解答得出的孔径 - 压力曲线形状基本一致, 且对于无剪胀性砂土而言, 本文解答与基于 MCC 模型解答得出的孔径 - 压力曲线完全重合, 说明当 $M_f=M$ 时, 本文解答退化为基于 MCC 模型的解答, 充分说明了本文解答的正确性。同时, 从图 2 可以看出, 在剪胀性中密砂土

和密实砂土中, 本文解答得出的孔径 - 压力曲线均高于 MCC 模型得出的孔径 - 压力曲线, 说明砂土峰值应力比对扩张压力存在明显影响, 而基于 MCC 模型的球孔扩张解答由于无法考虑砂土峰值应力比从而低估了扩张压力。

图 3 给出了不同种类砂土中孔周无量纲化塑性区半径 r_p/a 随无量纲化扩张半径 a/a_0 的变化规律。从图 3 可见, 在无剪胀性砂土中本文解答与基于 MCC 模型解答得出的扩张半径 - 塑性区半径曲线完全重合。然而, 对于在剪胀性中密砂土和密实砂土中扩张的球孔而言, 本文计算所得孔周塑性区半径均大于基于 MCC 模型解答的计算值。由式 (26) 可知本文砂土临界状态模型与 MCC 模型得出的弹塑边界处屈服应力完全相同, 因此, 本文计算所得较大塑性区半径说明孔周挤土效应由于土体剪胀而更为明显。

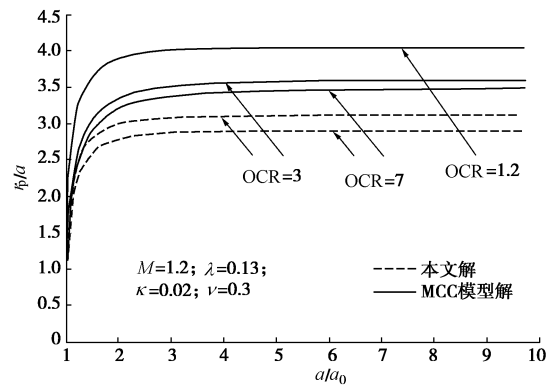


图 3 不同砂土中球孔扩张半径与孔周塑性区半径关系

Fig. 3 Variation of plastic zone radius with spherical cavity radius for different types of sand

此外, 从图 2, 3 可见, 在球孔扩张初期, 孔壁扩张压力和孔周塑性区半径与当前孔径比随扩张半径的增加而迅速增大, 随后其值缓慢增长且逐步趋于定值, 说明孔周土体逐步进入临界状态。此外, 图 2, 3 可以看出, 土体应力历史对球孔扩张过程有明显的影响, 土体 OCR 越大, 球孔扩张所需扩张压力越大, 而扩张过程中孔周塑性区半径越小。图 4~6 分别给出了球孔在不同种类砂土中扩张时孔壁一单元体在 $p-q$ 平面上对应的应力路径线 (SP)。同时, 为分析砂土剪胀性和峰值应力比对球孔扩张机制的影响, 图 4~6 中亦分别给出了基于 MCC 模型解答得出的应力路径线。图中 IYC 代表初始屈服面, CSL 表示临界状态线, 点 O, Y 和 F 分别代表初始应力点、屈服应力点和临界状态应力点。

从图 4~6 可以看出, 在球孔扩张初期, 由于孔壁单元体处于弹性状态, 且平均应力 p 在弹性阶段保持不变, 故应力路径线位于初始屈服面以内, 且为一条

竖直上升的直线。当应力路径线与初始屈服面相交于Y点时，孔壁土体屈服进入塑性状态。

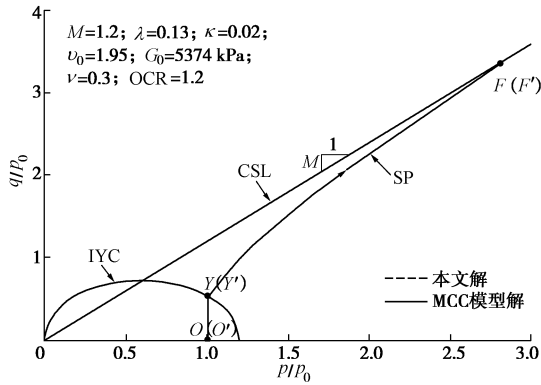


图4 无剪胀性砂土中孔壁单元体应力路径

Fig. 4 Stress paths of a soil element at cavity wall for non-dilatancy sand

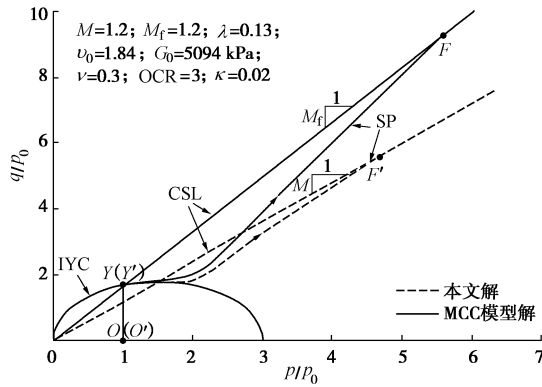


图5 剪胀性中密砂土中孔壁单元体应力路径

Fig. 5 Stress paths of a soil element at cavity wall for medium dilatant sand

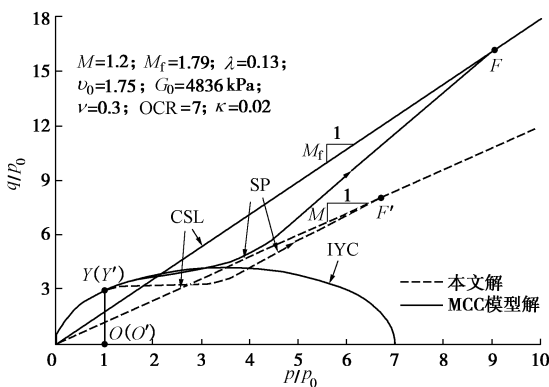


图6 剪胀性密实砂土中孔壁单元体应力路径

Fig. 6 Stress paths of a soil element at cavity wall for dilatant dense sand

从图4可以看出，对于无剪胀性砂土而言，当孔壁土体屈服后，随着球孔继续扩张，土体单元内平均应力p和偏应力q不断增大，应力路径线不断上升最终与CSL线相交于F点，随后孔壁土体进入临界状态，

在此过程中土体呈现出应变硬化特征。同时，由于松散无剪胀性砂土的峰值应力比Mf与特征状态应力比M相等，此时砂土临界状态模型退化为MCC模型，故图4中本文解答和基于MCC模型解答所得出的应力路径线重合为一条直线。

从图5, 6可以看出，对于剪胀性中密砂土和密实砂土而言，孔壁土体屈服后，土体单元内偏应力q基本不变，平均应力p不断增大，应力路径线在屈服面内水平向右移动，土体呈现出应变软化特性，随后土体单元内偏应力q和平均应力p增大，应力路径线向上移动逐步趋近于CSL线，最终与CSL线相交于F点，在此过程中土体呈现出应变硬化特征。同时，从图5, 6还可以看出，土体屈服后，由于基于MCC模型的解答无法考虑砂土峰值应力比，故其对应的应力路径线始终位于本文解答得出的应力路径线下方。

图7~9为不同类型砂土中球孔扩张至a/a0=2时孔周应力和比体积的分布规律。图中变量均以无量纲形式表示且横坐标均采用对数坐标。由于球孔扩张具有自相似性^[19]，故图7~9中的曲线也代表了孔壁土体在球孔扩张过程中所经历的应力、体应变状况。

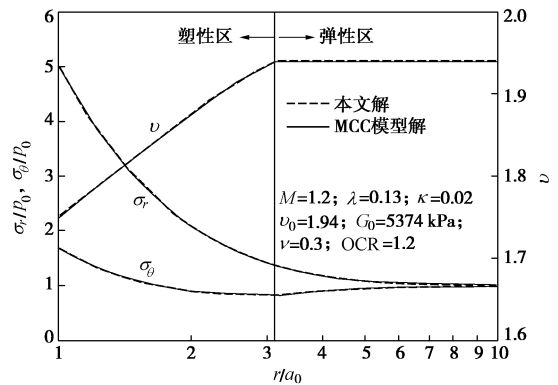


图7 无剪胀性砂土中孔周应力与比体积分布

Fig. 7 Distribution of stress components and specific volume around cavity in non-dilatancy sand

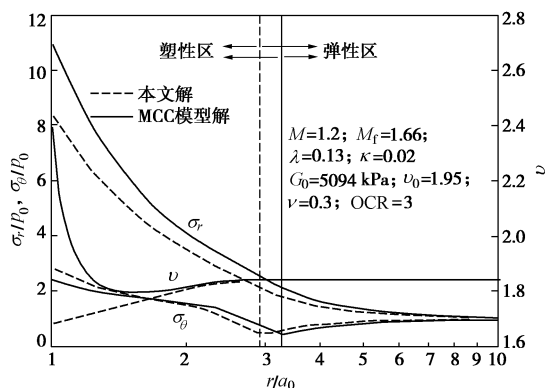


图8 剪胀性中密砂土中孔周应力与比体积分布

Fig. 8 Distribution of stress components and specific volume around cavity in medium dilatant sand

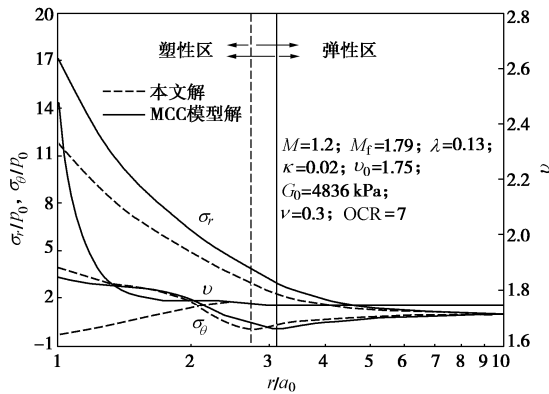


图 9 剪胀性密实砂土中孔周应力与比体积分布

Fig. 9 Distribution of stress components and specific volume around cavity in dilatant dense sand

从图 7~9 可以看出, 球孔扩张引起孔周塑性区内土体应力状态发生较大变化, 且随距孔壁距离的增加, 土体应力变化逐渐减小, 在弹性区内逐渐趋于初始应力状态。

对于无剪胀性砂土而言, 从图 7 可以看出球孔扩张后孔周塑性区内土体比体积减小, 说明孔周土体被剪缩。然而, 对于剪胀性砂土而言, 从图 8, 9 可见, 本文解答得出孔周塑性区内靠近孔壁处土体比体积明显增大, 但靠近弹塑性边界处土体比体积减小。结合球孔扩张的相似性可知球孔扩张过程中孔壁处土体进入塑性状态后首先被剪缩随后呈现出剪胀效应。然而, 基于 MCC 模型的球孔扩张解答求得孔周塑性区内土体均呈现出剪缩现象。同时, 基于 MCC 模型的球孔扩张解答由于无法考虑砂土的剪胀性和峰值应力比, 从而低估了孔周径向应力和弹塑性半径。以上分析充分说明本文基于砂土临界状态模型的球孔扩张解答不仅可以合理考虑孔周剪胀性砂土的峰值应力比, 而且可以充分反映孔周土体的剪缩/剪胀现象。

4 结 论

(1) 基于砂土临界状态模型推导了砂土中球孔扩张问题的弹塑性解。该解答考虑了砂土的峰值强度和剪胀特性, 因而可以较为合理地反映剪胀性砂土中的球孔扩张效应。

(2) 对于松散无剪胀性砂土而言, 球孔扩张过程中孔周塑性区内土体呈现出剪缩效应和应变硬化现象, 本文解答退化为基于修正剑桥模型的球孔扩张解答。

(3) 对于剪胀性砂土中的球孔扩张问题而言, 孔周土体屈服后首先被剪缩同时表现出应变软化现象, 随后土体呈现出剪胀效应和应变硬化现象。

(4) 基于修正剑桥模型的球孔扩张解答由于无法

考虑砂土的剪胀特性和峰值应力比, 从而低估了球孔扩张压力和孔周塑性区半径。

参考文献:

- [1] YU H S. Cavity expansion methods in geomechanics[M]. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [2] SHUTTLE D. Cylindrical cavity expansion and contraction in Tresca soil[J]. Géotechnique, 2007, 57(3): 305 - 308.
- [3] RANDOLPH M F. Science and empiricism in pile foundation design[J]. Géotechnique 2003, 53(10): 847 - 875.
- [4] 曹 权, 施建勇, 雷国辉, 等. 基于波速孔压静力触探试验研究软土中单桩桩侧承载力时效性[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(7): 1482 - 1487. (CAO Quan, SHI Jian-yong, LEI Guo-hui, et al. Research on time-effect of shaft bearing capacity of jacked-in single pile in soft soil based on seismic piezocone penetration tests (SCPTU)[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, 30(7): 1482 - 1487. (in Chinese))
- [5] 李镜培, 李 林, 孙德安, 等. 饱和软土地层静压沉桩阻力理论研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(8): 1454 - 1461. (LI Jing-pei, LI Lin, SUN De-an, TANG Jian-hua. Theoretical study on sinking resistance of jacked piles in saturated soft clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(8): 1454 - 1461. (in Chinese))
- [6] VESIC A S. Expansion of cavity in infinite soil mass[J]. Journal of Soil Mechanics Foundation Division, American Society of Civil Engineering, 1972, 98(3): 265 - 289.
- [7] CARTER J P, BOOKER J R, YEUNG S K. Cavity expansion in cohesive frictional soils[J]. Géotechnique, 1986, 36(3): 349 - 353.
- [8] YU H S, HOULSBY G T. Finite cavity expansion in dilatant soils: loading analysis[J]. Géotechnique, 1991, 41(2): 173 - 183.
- [9] MANTARAS F M, SCHNAID F. Cylindrical cavity expansion in dilatant cohesive-frictional materials[J]. Géotechnique, 2002, 52(5): 337 - 348.
- [10] PALMER A C, MITCHELL R J. Plane-strain expansion of a cylindrical cavity in clay[C]// Stress-strain Behaviour of Soils: Proceedings of the Roscoe Memorial Symposium. Cambridge, 1972: 588 - 599.
- [11] CAO L F, TEH C I, CHANG M F. Undrained cavity expansion in modified Cam clay I: theoretical analysis[J]. Géotechnique 2001, 51(4): 323 - 334.
- [12] SATHANANTHAN I, INDRARATNA B, RUJIKIATKAMJORN C. Evaluation of smear zone extent surrounding mandrel

- driven vertical drains using the cavity expansion theory[J]. International Journal of Geomechanics, 2008, **8**(6): 355 - 365.
- [13] LI J P, LI L, SUN D A, et al. Analysis of undrained cylindrical cavity expansion considering three-dimensional strength of soils[J]. International Journal of Geomechanics, 2016, 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000650, 04016017.
- [14] 肖昭然, 张 昭, 杜明芳. 饱和土体小孔扩张问题的弹塑性解析解[J]. 岩土力学, 2014, **25**(9): 1373 - 1378. (XIAO Zhao-ran, ZHANG Zhao, DU Ming-fang. An elastoplastic closed-form approach of cavity expansion in saturated soil based on modified Cam clay model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **25**(9): 1373 - 1378. (in Chinese))
- [15] 刘维正, 石名磊, 徐林荣. 考虑软黏土结构性损伤的圆柱孔扩张弹塑性分析[J]. 岩土工程学报, 2015, **35**(3): 487 - 494. (LIU Wei-zheng, SHI Ming-lei, XU Lin-rong. Elastoplastic analysis of cylindrical cavity expansion in natural sedimentary soft clay with structure damage[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **35**(3): 487 - 494. (in Chinese))
- [16] VINCENZO S, GHASSAN A S. Analytical solution for undrained plane strain expansion of a cylindrical cavity in modified cam clay[J]. Geomechanics and Engineering, 2012, **4**(1): 19 - 37.
- [17] CHEN S L, ABOUSLEIMAN Y N. Exact undrained elasto-plastic solution for cylindrical cavity expansion in modified Cam clay soil[J]. Géotechnique, 2012, **62**(5): 447 - 456.
- [18] LI L, LI J P, SUN D A. Anisotropically elasto-plastic solution to undrained cylindrical cavity expansion in K_0 -consolidated clay[J]. Computers and Geotechnics, 2016, **73**: 83 - 90.
- [19] COLLINS I F, PENDER M J, WANG Y. Cavity expansion in sands under drained loading conditions[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1992, **16**(1): 3 - 23.
- [20] COLLINS I F, STIMPSON J R. Similarity solutions for drained and undrained cavity expansion in soils[J]. Géotechnique 1994, **44**(1): 21 - 34.
- [21] COLLINS I F, YU H S. Undrained cavity expansion in critical state soils[J]. Int J Numer Anal Methods Geomech, 1996, **20**(7): 489 - 516.
- [22] OSINOV V A, CUDMANI R. Theoretical investigations of the cavity expansion problem based on a hypoplasticity model[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2001, **25**(5): 473 - 495.
- [23] RUSSELL A R, KHALILI N. Drained cavity expansion in sands exhibiting particle crushing[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, **26**: 323 - 340.
- [24] 蒋明镜, 孙渝刚. 考虑砂土颗粒破碎的圆孔扩张半解析分析[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(11): 1645 - 1651. (JIANG Ming-jing, SUN Yu-gang. Semi-analytical solution to cavity expansion in crushable sands[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(11): 1645 - 1651. (in Chinese))
- [25] 姚仰平, 罗 汀, 孙德安, 等. 黏土和砂土简单的三维本构模型[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(2): 240 - 243. (YAO Yang-ping, LUO Ting, SUN De-an, et al. A simple 3D constitutive model for both clay and sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(2): 2 - 243. (in Chinese))
- [26] YAO Y P, SUN D A, MATSUOKA H. A unified constitutive model for both clay and sand with hardening parameter independent on stress path[J]. Computers and Geotechnics, 2008, **35**(2): 210 - 222.
- [27] SUN D A, MATSUOKA H, YAO Y P. An anisotropic hardening elastoplastic model for clays and sands and its application to FE analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2004, **31**(1): 37 - 46.
- [28] YAO Y P, SUN D A, LUO T. A critical state model for sands dependent on stress and density[J]. International Journal of Geomechanics, 2004, **28**(4): 323 - 337.