

DOI: 10.11779/CJGE201703005

# 饱和度对平面 P 波入射下自由场地地震反应的影响分析

李伟华<sup>1</sup>, 郑洁<sup>2</sup>

(1. 北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044; 2. 中冶京诚工程技术有限公司, 北京 100176)

**摘要:** 场地土的特性是影响场地地震反应的重要因素。以往自由场地地震反应分析中常假定场地土为单相介质或两相饱和和多孔介质, 而在实际工程中, 常会遇到非饱和土的相关问题。目前对非饱和土波动特性的研究尚处于起步阶段, 关于土体饱和度的变化对自由场地地震动的影响亦只针对准饱和土(饱和度  $S_r \geq 90\%$ )的情况。为研究  $S_r < 90\%$  时, 饱和度变化对自由场地地震动的影响, 建立了非饱和土自由场地地震反应分析模型, 在现有的非饱和和多孔介质波动方程的基础上, 对平面 P 波入射情况下场地中的波场进行分析, 根据场地边界条件, 求得到平面 P 波入射情况下非饱和土自由场地地震地面运动的解析解答, 通过计算, 系统地分析了入射角度、频率、土层刚度、孔隙率不同时, 土体饱和度和变化对非饱和土自由场地地震地面运动的影响, 得到了非饱和土自由场地地震反应的一般规律。

**关键词:** 非饱和孔隙介质; 自由场地; 地面运动; 饱和度; 平面 P 波

中图分类号: TU435

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2017)03-0427-09

**作者简介:** 李伟华(1976-), 女, 博士, 副教授, 主要从事土动力学和地震工程方面的研究。E-mail: whli@bjtu.edu.cn。

## Effects of saturation on free-field responses of site due to plane P-wave incidence

LI Wei-hua<sup>1</sup>, ZHENG Jie<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Beijing Jiao-tong University, Beijing 100044, China; 2. MCC Capital Engineering

Research Incorporation Limited, Beijing 100176, China)

**Abstract:** The property of the soil in free field is an important influencing factor for the free field seismic response. In the existing studies the soil at local site is supposed to be the single-phase medium or saturated porous medium. But in fact, it consists of solid phase, liquid phase and gas phase sometimes, and presents the porous and multi-phase characteristics. The researches on the wave characteristics of unsaturated soils are still at the initial stage. The analysis about the effects of saturation on free-field responses of site is also limited under the condition of  $S_r \geq 90\%$ . To analyze the effects of saturation on free-field responses of site when  $S_r < 90\%$ , the free field model for unsaturated soils is established, and the wave fields in the free field of unsaturated soils under the P-wave incidence are analyzed. According to the boundary conditions, the undetermined coefficients of the waves are determined, and then the analytical solutions to the free site seismic ground motion of unsaturated soils are gained in the case of P-wave incidence. On the basis of analytical solutions, the effects of saturation on the free field seismic responses under different incident angles, wave frequencies, soil rigidities and porosities are analyzed. Some general rules of the seismic responses of the free site of unsaturated soils are obtained.

**Key words:** unsaturated porous medium; free field; earthquake ground motion; saturation; plane P-wave

## 0 引言

场地地震反应问题, 即场地条件对地震波传播的影响问题, 作为地震工程学中的两大类波动问题之一, 一直备受关注。最初在场地地震反应的研究中, 场地土均假定为单相介质, 不考虑土的多相多孔性。随着 Biot 理论<sup>[1]</sup>的发展, 许多学者<sup>[2-5]</sup>开始关注饱和土和准饱和土的局部场地动力反应问题。通过研究发现: 把饱和土场地模拟为单相介质和模拟为饱和和多孔介质, 得到的局部场地地震地面运动是不同的。Yang<sup>[6]</sup>在饱和和多孔介质理论的基础上研究了准饱和土(饱和度大

于 90% 的土)的饱和度变化对局部场地地震动的影响。研究发现当饱和度在 90%~100% 之间变化时, 饱和度的变化对饱和土局部场地地震地面运动的影响很大。这些研究提示我们应该重视饱和度的变化对局部场地地震动力响应的影响。

自 1956 年 Biot 建立流体饱和和多孔介质波传播理论至今, 人们对于饱和土的波动特性已经有了系统深

基金项目: 国家自然科学基金项目(51378058); 国家重点基础研究发展计划项目(2015CB057800)

收稿日期: 2015-12-28

入的认识,而非饱和土波动特性的研究还是一个相对很新的课题。首先,随着多孔介质理论和混合物理论的发展,一些学者们<sup>[7-14]</sup>分别依据 Biot 理论、混合物理论或二者的结合各自建立了非饱和多孔介质的动力方程,并研究了非饱和和多孔介质中弹性波的传播特征,确定非饱和颗粒介质中存在着 1 种剪切波和 3 种压缩波(P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>和 P<sub>3</sub>波),其中 P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>波和剪切波与 Biot 流体饱和和多孔介质理论确定的波动类似, P<sub>3</sub>波则是由于气相的存在引起的波动,并给出了其波速及衰减特性。其次,个别学者<sup>[15-19]</sup>对已有饱和多孔介质的动力方程进行简化,借助数值方法对方程进行了求解。另外,也有学者开始研究在非饱和土层分界面上弹性波的传播情况。Lo<sup>[20]</sup>研究了在非饱和土半空间地表传播的 Rayleigh 波,Chen 等<sup>[21-22]</sup>研究了非饱和多孔介质与单相弹性介质交界面处的面波和平面 P 波波动, Tomar 和 Arora 等<sup>[23]</sup>研究了波由单相弹性介质入射到非饱和和多孔介质交界面处反射与透射, Kumar 等<sup>[24]</sup>研究了波在两种不同非饱和介质交界面处的反射和透射情况。这些研究明确了各模式的反射波与透射波受土层的饱和度变化的影响较为显著。进一步提示我们在场地地震反应研究中应重视饱和度变化的影响,关于非饱和和孔隙介质场地地震动特性的相关研究亟待展开。

本文首次将三相非饱和和孔隙介质动力模型引入到自由场地地震地面运动的解析分析中,建立了非饱和和土自由场地分析模型,推导得到了平面 P 波入射情况下非饱和和土自由场地地震地面运动的解析解。在此基础上,计算分析了在入射角度、入射波频率和场地的刚度、孔隙率不同时,饱和度变化对场地的地震地面运动的影响。

## 1 场地波动方程及其一般解

### 1.1 非饱和和土自由场地模型

非饱和和土自由场地模型如图 1 所示,为一水平均匀半无限基岩层上覆厚度为  $H$  的均匀非饱和土层,在基岩表面处设如图所示的坐标系。非饱和土层用非饱和和孔隙介质模拟。文献[10]在多孔介质混合物理论的基础上,考虑边界上的动态相容条件,提出了非饱和和孔隙介质的波动方程:

$$n_0^S \rho_0^S \ddot{\mathbf{u}}^S = (M_{SS} + G) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^S + G \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}^S + M_{SW} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^W + M_{SN} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^N + \hat{\mu}^W (\dot{\mathbf{u}}^W - \dot{\mathbf{u}}^S) + \hat{\mu}^N (\dot{\mathbf{u}}^N - \dot{\mathbf{u}}^S), \quad (1a)$$

$$n_0^W \rho_0^W \ddot{\mathbf{u}}^W = M_{SW} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^S + M_{WW} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^W + M_{WN} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^N - \hat{\mu}^W (\dot{\mathbf{u}}^W - \dot{\mathbf{u}}^S), \quad (1b)$$

$$n_0^N \rho_0^N \ddot{\mathbf{u}}^N = M_{SN} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^S + M_{WN} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^W + M_{NN} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^N - \hat{\mu}^N (\dot{\mathbf{u}}^N - \dot{\mathbf{u}}^S). \quad (1c)$$

式中,上角标 S, W, N 分别代表多孔介质固相部分、湿润流体部分和干燥流体部分;  $n_0^\alpha$ ,  $\rho_0^\alpha$ ,  $\mathbf{u}^\alpha$  ( $\alpha = S, W, N$ , 下同)分别为各组分的初始体积分数、初始密度、位移;  $M_{SS}$ ,  $M_{WW}$ ,  $M_{NN}$ ,  $M_{SW}$ ,  $M_{SN}$ ,  $M_{WN}$ 为弹性系数,  $\hat{\mu}^f$  ( $f = W, N$ )为与渗透系数  $k$  有关的参数,

$$\hat{\mu}^f = \frac{(n_0^f)^2 \nu^f}{k k_r^f}, \quad (2)$$

其中,  $\nu^f$  为  $f$  相流体的动力黏滞系数  $k_r^f$  为  $f$  相流体的相对渗透系数,是饱和度  $S_r$  的函数,可表示为

$$\left. \begin{aligned} k_r^W &= S_e^{(2+3\lambda)/\lambda}, \\ k_r^N &= (1 - S_e)^2 (1 - S_e^{(2+\lambda)/\lambda}). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中

$$S_e = \begin{cases} 0.0 & S_r \leq S_{rW} \\ \frac{S_r - S_{rW}}{S_{rN} - S_{rW}} & S_{rW} < S_r < S_{rN} \\ 1.0 & S_r \geq S_{rN} \end{cases}, \quad (4)$$

$S_{rW}$  为束缚饱和度,  $S_{rN}$  为空气残余饱和度。

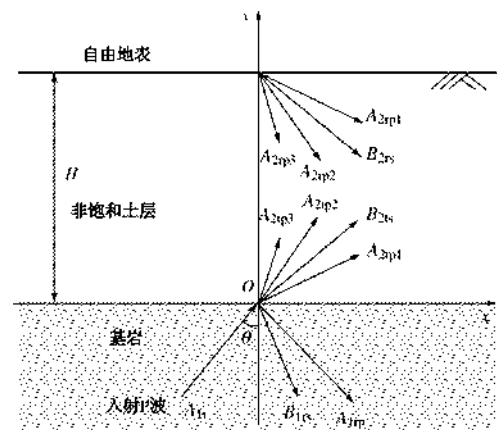


图 1 非饱和和土自由场地简化模型

Fig. 1 Simplified model for unstrated free feild

Wei<sup>[15]</sup>给出了方程(1)中弹性系数与非饱和和孔隙介质各相的体积模量  $K^\alpha$ 、固体骨架的体积模量  $K$ 、剪切模量  $G$  及有效应力系数  $\alpha_b$  的关系:

$$M_{SS} = K - \frac{2G}{3} + \frac{(n_0^S)^2 (K^S - \lambda')^2 \Gamma}{(K^S)^2}, \quad (5a)$$

$$M_{SW} = \frac{n_0^S n_0^W (K^S - \lambda') K^W \Gamma}{K^S (K^W + n_0^W \Theta_W)}, \quad (5b)$$

$$M_{SN} = \frac{n_0^S n_0^N (K^S - \lambda') K^N \Gamma}{K^S (K^N + n_0^N \Theta_N)}, \quad (5c)$$

$$M_{WW} = \frac{(n_0^W)^2 K^W \Gamma}{(K^W + n_0^W \Theta_W)} \left[ 1 + \frac{n_0^S \Theta_W}{K^S} + \frac{n_0^N \Theta_W}{(K^N + n_0^N \Theta_N)} \right], \quad (5d)$$

$$M_{NN} = \frac{(n_0^N)^2 K^N \Gamma}{(K^N + n_0^N \Theta_N)} \left[ 1 + \frac{n_0^S \Theta_N}{K^S} + \frac{n_0^W \Theta_N}{(K^W + n_0^W \Theta_W)} \right], \quad (5e)$$

$$M_{WN} = \frac{n_0^W n_0^N K^W K^N \Gamma}{(K^W + n_0^W \Theta_W)(K^N + n_0^N \Theta_N)} \quad (5f)$$

其中

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{n_0^S}{K^S} + \frac{n_0^W}{K^W + n_0^W \Theta_W} + \frac{n_0^N}{K^N + n_0^N \Theta_N} \quad (6a)$$

$$\lambda' = \frac{(1 - \alpha_B) K^S}{n_0^S} \quad (6b)$$

式(5), (6)中,  $\Theta_W$ ,  $\Theta_N$ 为描述毛细管平衡条件的参数, 对给定的饱和度  $S_r$ , 可由

$$\Theta_W + \Theta_N = -\frac{\partial(p^N - p^W)}{\partial n^W} \quad (7)$$

计算。其中,  $p^N - p^W$ 为基质吸力, 根据 Brooks-Corey 土水特征曲线模型有

$$p^N - p^W = p_d S_e^{-1/\lambda} \quad (8)$$

式中,  $p_d$ 为进气压力值,  $\lambda$ 为正常数。

由线弹性状态下非饱和和多孔介质的应力-应变关系, 可以得到  $\Theta_W$ 和  $\Theta_N$ 的关系

$$\alpha_B \frac{S_r - S_{rW}}{1 - S_{rW}} = n_0^W + \frac{(\alpha_B - n_0^W)\Theta_N}{\Theta_W + \Theta_N} \quad (9)$$

联立式(7)~(9)即可求得  $\Theta_W$ 和  $\Theta_N$ 。

根据多孔弹性模型, 非饱和孔隙介质的应力张量可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma^S &= (M_{SS} \nabla \cdot \mathbf{u}^S + M_{SW} \nabla \cdot \mathbf{u}^W + M_{SN} \nabla \cdot \mathbf{u}^N) \mathbf{I} + \\ & 2G(\nabla \mathbf{u}^S + (\nabla \mathbf{u}^S)^T) \\ \sigma^W &= (M_{SW} \nabla \cdot \mathbf{u}^S + M_{WW} \nabla \cdot \mathbf{u}^W + M_{WN} \nabla \cdot \mathbf{u}^N) \mathbf{I} \\ \sigma^N &= (M_{SN} \nabla \cdot \mathbf{u}^S + M_{WN} \nabla \cdot \mathbf{u}^W + M_{NN} \nabla \cdot \mathbf{u}^N) \mathbf{I} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中,  $\sigma^\alpha$  ( $\alpha = S, W, N$ )分别为各相的应力张量,  $\mathbf{I}$ 为单位张量。

非饱和孔隙介质波动方程式(1)可以退化成形如 Biot<sup>[1]</sup>提出的饱和孔隙介质的波动方程, 详见文献[10]。

半无限基岩层采用单相弹性介质模拟。单相介质的波动方程为

$$(\lambda^r + \mu^r) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^r + \mu^r \nabla^2 \mathbf{u}^r = \rho^r \ddot{\mathbf{u}}^r \quad (11)$$

式中, 上角 $r$ 表示基岩;  $\lambda^r$ 和  $\mu^r$ 为基岩的Lame常数;  $\rho^r$ 为基岩的密度;  $\mathbf{u}^r$ 和  $\ddot{\mathbf{u}}^r$ 分别为位移和加速度矢量。

### 1.2 非饱和多孔介质波动方程的解

根据 Helmholtz 分解原理, 式(1)中位移矢量  $\mathbf{u}^\alpha$  可表示为

$$\mathbf{u}^\alpha = \nabla \phi^\alpha + \nabla \times \boldsymbol{\psi}^\alpha \quad (\alpha = S, W, N) \quad (12)$$

式中  $\phi^\alpha$ ,  $\boldsymbol{\psi}^\alpha$ 分别为非饱和孔隙介质各相的标量和矢量势函数。只考虑简谐波情况, 将式(12)代入式(1)中, 可以得到压缩波的波动方程

$$(A \nabla^6 + \omega^2 B \nabla^4 + \omega^4 C \nabla^2 + \omega^6 D) \phi^S = 0 \quad (13)$$

其中  $A, B, C, D$ 的表达式见附录1。式(13)可以分解为

$$(\nabla^2 + k_{p,j}^2) \phi_j^S = 0 \quad (j = 1, 3) \quad (14)$$

$k_{p,j}$ 为压缩波波数, 且有

$$k_{p,j} = \frac{\omega}{c_{p,j}} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (15)$$

其中,  $\omega$ 为简谐波圆频率,  $c_{p,j}$ 为压缩波波速。从式(14)中可以看出在非饱和多孔介质中存在3种压缩波  $P_1, P_2$ 和  $P_3$ 。固相标量势函数可以表示为

$$\phi^S = \phi_1^S + \phi_2^S + \phi_3^S \quad (16)$$

液相和气相的标量势函数分别为

$$\phi^W = \delta_1^W \phi_1^S + \delta_2^W \phi_2^S + \delta_3^W \phi_3^S \quad (17)$$

$$\phi^N = \delta_1^N \phi_1^S + \delta_2^N \phi_2^S + \delta_3^N \phi_3^S \quad (18)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \delta_j^W &= \frac{A_1 - B_1 c_{p,j}^2 + C_1 c_{p,j}^4}{A_3 - B_3 c_{p,j}^2 + C_3 c_{p,j}^4} \quad (j = 1, 2, 3) \\ \delta_j^N &= \frac{A_2 - B_2 c_{p,j}^2 + C_2 c_{p,j}^4}{A_3 - B_3 c_{p,j}^2 + C_3 c_{p,j}^4} \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$A_j, B_j, C_j$  ( $j = 1, 2, 3$ )见附录1。

同理可以得到剪切波波动方程

$$(\nabla^2 + k_s^2) \psi^S = 0 \quad (20)$$

$k_s$ 为剪切波波数, 且有

$$k_s = \frac{\omega}{c_s} \quad (21)$$

其中  $c_s$ 为剪切波波速,

$$c_s^2 = \frac{G}{\gamma_{SS} - \gamma_{SW} \delta_s^W - \gamma_{SN} \delta_s^N} \quad (22)$$

液相和气相的矢量势函数可分别表示为

$$\boldsymbol{\psi}^W = \delta_s^W \boldsymbol{\psi}^S \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\psi}^N = \delta_s^N \boldsymbol{\psi}^S \quad (24)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \delta_s^W &= \frac{\gamma_{SW}}{\gamma_{WW}} \\ \delta_s^N &= \frac{\gamma_{SN}}{\gamma_{NN}} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式(22)和(25)中,  $\gamma_{SS}, \gamma_{SW}, \gamma_{SN}, \gamma_{WW}, \gamma_{NN}$ 的表达式见附录1。

## 2 波场分析

设有一频率为  $\omega$ , 入射角为  $\theta$ , 幅值为  $A_{i1}$ 的平面P波从基岩入射到上覆非饱和土层, 则入射波将在土层内产生反射和透射, 各土层中的波场如图1所示, 具体波场分析如下。

在基岩层中 ( $y < 0$ ): 波从基岩层入射到上覆土层中时, 产生反射波, 基岩层中的总波场可表示为

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{i1} + \phi_r \\ &= A_{i1p} \exp[i\omega t + ik_{1p}(-l_{1p}x - n_{1p}y)] + \end{aligned}$$

$$A_{1ip} \exp[i\omega t + ik_{1p}(-l_{1ip}x + n_{1ip}y)] \quad , \quad (26a)$$

$$\psi_{1r} = B_{1rs} \exp[i\omega t + ik_{1s}(-l_{1rs}x + n_{1rs}y)] \quad 。 \quad (26b)$$

上覆非饱和土层中 (  $0 < y < H$  ) : 波从基岩层入射到上覆非饱和土层中时, 在非饱和土层中的总波场可表示为

$$\begin{aligned} \phi^S = & \sum_{j=1}^3 A_{2ipj} \exp[i\omega t + ik_{2pj}(-l_{2ipj}x - n_{2ipj}y)] + \\ & \sum_{j=1}^3 A_{2rpj} \exp[i\omega t + ik_{2pj}(-l_{2rpj}x + n_{2rpj}y)] \quad , \quad (27a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^F = & \sum_{j=1}^3 A_{2ipj} \delta_j^F \exp[i\omega t + ik_{2pj}(-l_{2ipj}x - n_{2ipj}y)] + \\ & \sum_{j=1}^3 A_{2rpj} \delta_j^F \exp[i\omega t + ik_{2pj}(-l_{2rpj}x + n_{2rpj}y)] \quad , \quad (27b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^S = & B_{2is} \exp[i\omega t + ik_{2s}(-l_{2is}x - n_{2is}y)] + \\ & B_{2rs} \exp[i\omega t + ik_{2s}(-l_{2rs}x + n_{2rs}y)] \quad , \quad (28a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^F = & B_{2is} \delta_s^F \exp[i\omega t + ik_{2s}(-l_{2is}x - n_{2is}y)] + \\ & B_{2rs} \delta_s^F \exp[i\omega t + ik_{2s}(-l_{2rs}x + n_{2rs}y)] \quad 。 \quad (28b) \end{aligned}$$

其中:  $i = \sqrt{-1}$ ;  $F=W, N$ ;  $A, B$  分别为 P 波和 SV 波的波幅系数;  $k$  为各波波数;  $l, n$  分别为  $x, y$  方向的方向矢量,  $l^2 + n^2 = 1$ ; 下角标  $i, r, t$  分别表示入射、反射、透射; 1 代表基岩层, 2 代表上覆非饱和土层;  $p, s, p1, p2, p3$  分别表示 P 波、SV 波、P<sub>1</sub> 波、P<sub>2</sub> 波和 P<sub>3</sub> 波。入射 P 波的方向矢量  $l_{1ip} = \sin \theta$ , 根据 Snell 定理有

$$k_{1p}l_{1ip} = k_{1p}l_{1rp} = k_{1s}l_{1rs} \quad , \quad (29a)$$

$$k_{1p}l_{1ip} = k_{2pj}l_{2rpj} = k_{2s}l_{2rs} = k_{2pj}l_{2ipj} = k_{2s}l_{2is} \quad (j=1,2,3) \quad 。 \quad (29b)$$

### 3 边界条件及问题的解

假定半无限基岩层和均匀非饱和土层之间应力和位移连续, 且界面上不透水, 则基岩层和均匀非饱和土层交界面上的边界条件可以表示为

交界面上法向总应力连续,

$$\sigma_{yy}^r |_{y=0} = \sigma_{yy}^S |_{y=0} + \sigma_{yy}^S |_{y=0} + \sigma_{yy}^S |_{y=0} \quad ; \quad (30)$$

交界面上基岩的切向应力与非饱和土固相切向应力连续,

$$\sigma_{xy}^r |_{y=0} = \sigma_{xy}^S |_{y=0} \quad ; \quad (31)$$

交界面上基岩的法向位移与非饱和土固相的法向位移连续,

$$u_y^r |_{y=0} = u_y^S |_{y=0} \quad ; \quad (32)$$

交界面上非饱和土液相, 气相与固相的法向相对位移为零,

$$u_y^S |_{y=0} = u_y^W |_{y=0} \quad , \quad (33)$$

$$u_y^S |_{y=0} = u_y^N |_{y=0} \quad ; \quad (34)$$

交界面上基岩的切向位移与非饱和土固相的切向位移

连续,

$$u_x |_{y=0} = u_x^S |_{y=0} \quad ; \quad (35)$$

非饱和土地表面 ( $y=H$ )为自由边界, 边界条件为

$$\sigma_{yy}^S |_{y=H} = \sigma_{yy}^W |_{y=H} = \sigma_{yy}^N |_{y=H} = 0 \quad , \quad (36)$$

$$\sigma_{xy}^S |_{y=H} = 0 \quad 。 \quad (37)$$

根据前面给出的场地中的波场, 单相弹性介质应力应变关系 (略) 和流体饱和和多孔介质的应力应变关系式 (10) 及 Helmholtz 分解原理式 (12), 将波场函数代入边界条件, 可以得到如下线性方程组

$$AX^T = A_{1ip}B^T \quad 。 \quad (38)$$

其中,  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_i]$  ( $i, j=1, 2, \dots, 10$ ),  $X = [A_{1ip} \ B_{1rs} \ A_{2ip1} \ A_{2ip2} \ A_{2ip3} \ A_{2rp1} \ A_{2rp2} \ A_{2rp3} \ B_{2is} \ B_{2rs}]$ 。 $a_{ij}$  和  $b_i$  的表达式见附录 2。解方程组, 可以得到 P 波从基岩层入射到非饱和土上覆土层时, 在场地中产生波场的波幅系数, 从而确定场地中的波场。若令  $H \rightarrow \infty$ , 本文的解可以退化为波在弹性介质与非饱和多孔介质交界面上的反射与透射问题, 通过与文献[22]的对比, 可以验证本文的解, 因篇幅限制, 验证从略。

### 4 饱和度对非饱和土自由场地表位移的影响

波场确定后, 场地中各点的位移、应力均可确定。本文将重点分析非饱和土层自由地表的位移, 把式 (27)、(28) 代入式 (12), 便可以得到地表面非饱和土固相水平位移幅值  $u_x$  和竖向位移幅值  $u_y$ ,

$$\begin{aligned} u_x = & \left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 (-ik_{2pj}l_{2rpj})A_{2rpj} \exp(-iHk_{2pj}n_{2rpj}) - ik_{2s}n_{2rs}B_{2rs} \exp(-iHk_{2s}n_{2rs}) + \\ & \sum_{j=1}^3 (-ik_{2pj}l_{2ipj})A_{2ipj} \exp(iHk_{2pj}n_{2ipj}) + ik_{2s}n_{2is}B_{2is} \exp(iHk_{2s}n_{2is}) \end{aligned} \right\} \\ u_y = & \left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 (ik_{2pj}n_{2rpj})A_{2rpj} \exp(-iHk_{2pj}n_{2rpj}) - ik_{2s}l_{2rs}B_{2rs} \exp(-iHk_{2s}n_{2rs}) + \\ & \sum_{j=1}^3 (-ik_{2pj}n_{2ipj})A_{2ipj} \exp(iHk_{2pj}n_{2ipj}) - ik_{2s}l_{2is}B_{2is} \exp(iHk_{2s}n_{2is}) \end{aligned} \right\} \quad (39) \end{aligned}$$

分析中采用无量纲频率  $\omega / \omega_1$ , 其中  $\omega_1$  为上覆土层完全饱和时的固有频率  $\omega_1 = \pi c_s / 2H$ ,  $c_s$  为上覆土层完全饱和时的剪切波波速。地表位移用位移分量的幅值与入射波位移幅值  $u_0$  的比值, 即放大系数来表示。非饱和土层材料参数取值见表 1, 非饱和土土水特征曲线参数取值为  $S_{rw} = 0.1$ ,  $S_{rn} = 0.95$ ,  $p_d = 50 \text{ kPa}$ ,  $\lambda = 1.5$ 。表 1 中 3 组参数的区别在于土体骨架的弹性常数不同, 分别代表软硬程度不同的 3 种非饱和土层。为反映饱和度的影响, 文中分别取  $S_r = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  进行分析。其中  $S_r = 0$  表示孔隙完全被空气充满,  $S_r = 1.0$  则表示孔隙完全被水充满。取基岩层的材料参数为  $\rho^r = 2650 \text{ kg/m}^3$ ,  $\lambda^r = 12.0 \times 10^9 \text{ Pa}$ ,  $\mu^r = 8.0 \times 10^9 \text{ Pa}$ 。

表1 非饱和土层参数

Table 1 Material parameters of unsaturated soils

组别	$K$ /Pa	$G$ /Pa	$\rho^S$ /( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	$\rho^W$ /( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	$\rho^N$ /( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	$n_0$	$K^S$ /Pa	$K^W$ /Pa	$K^N$ /Pa	$\nu^W$ /(Pa·s)	$\nu^N$ /(Pa·s)	$k$ /m <sup>2</sup>
1	$1.02\times 10^9$	$1.44\times 10^9$	2650	997	1.1	0.23	$3.5\times 10^{10}$	$2.25\times 10^9$	$0.11\times 10^6$	$1.0\times 10^{-3}$	$1.8\times 10^{-5}$	$2.5\times 10^{-12}$
2	$1.02\times 10^8$	$1.44\times 10^8$	2650	997	1.1	0.23	$3.5\times 10^{10}$	$2.25\times 10^9$	$0.11\times 10^6$	$1.0\times 10^{-3}$	$1.8\times 10^{-5}$	$2.5\times 10^{-12}$
3	$1.02\times 10^7$	$1.44\times 10^7$	2650	997	1.1	0.23	$3.5\times 10^{10}$	$2.25\times 10^9$	$0.11\times 10^6$	$1.0\times 10^{-3}$	$1.8\times 10^{-5}$	$2.5\times 10^{-12}$

4.1 不同入射角下饱和度的影响

图2给出取表1中第1组参数, 无量纲频率  $\omega/\omega_1=5.0$ , 不同饱和度 ( $S_r=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ ) 条件下, 非饱和土自由场地地表水平和竖向位移放大系数随入射角度变化的关系曲线。横坐标为入射角  $\theta$ , 纵坐标为位移放大系数。

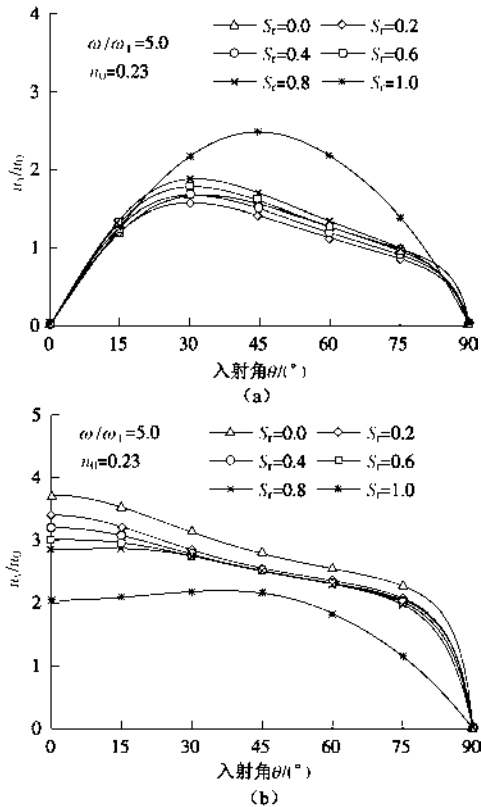


图2 不同饱和度下地表位移放大系数与入射角关系曲线(第1组参数)

Fig. 2 Surface displacement amplitudes versus P-wave incident angles with different saturations for parameter group 1

从图2中可以看出, 无论饱和度取何值, 当P波垂直入射 ( $\theta=0^\circ$ ) 时, 地表水平位移为零, 竖向位移最大, 当P波掠入射 ( $\theta=90^\circ$ ) 时, 地表水平、竖向位移均为0, 随着入射角度的增加, 地表水平位移先增大后减小, 当  $S_r < 1.0$  时, 在  $\theta=30^\circ$  时达到最大值。随着入射角度的增加, 饱和度变化对水平位移的影响也是先增加后减小。当  $S_r < 1.0$  时, 随饱和度的增加, 水平位移放大系数逐渐增加, 但增幅不大; 当  $S_r=1.0$  时, 水平位移放大系数与非饱和状态相比出现明显增长。当入射角  $\theta=0^\circ$  时, 饱和度对竖向位移放大系数的影响最大, 随着饱和度的增加, 竖向位移放大系数

逐渐减小, 当  $S_r=1.0$  时, 竖向位移放大系数减小明显。随着入射角的增加, 饱和度对竖向位移的影响逐渐减小, 当  $\theta > 30^\circ$ ,  $S_r < 1.0$  时, 饱和度变化, 竖向位移放大系数基本不变, 而当  $S_r=1.0$  时, 竖向位移放大系数明显减小。由此可见, 气相状态的存在对自由场地表面运动具有较为显著的影响。

4.2 不同频率下饱和度的影响

图3给出取表1中第1组参数, 入射角  $\theta=20^\circ$  时, 不同饱和度 ( $S_r=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ ) 条件下, 非饱和土自由场地地表水平和竖向位移放大系数随入射波相对频率变化的关系曲线。横坐标为相对频率  $\omega/\omega_1$ , 纵坐标为位移放大系数。

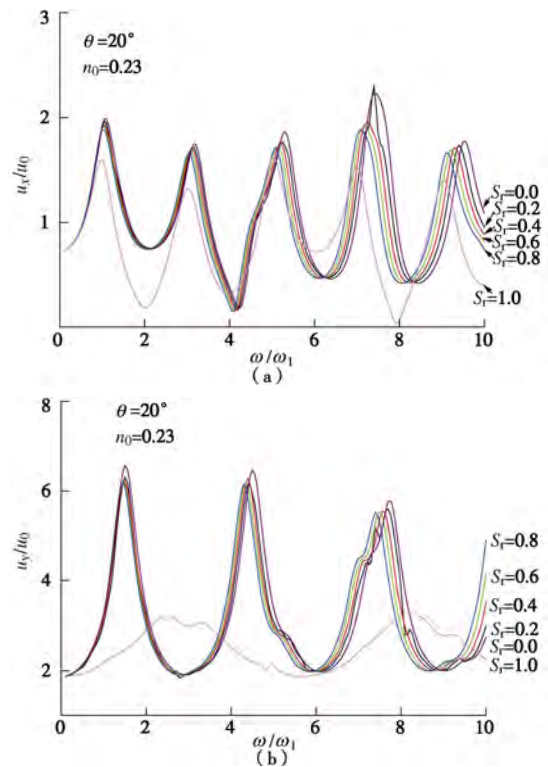


图3 不同饱和度下地表位移放大系数与相对频率关系曲线(第1组参数)

Fig. 3 Surface displacement amplitudes versus relative frequencies with different saturations for parameter group 1

从图3可看出, 当  $S_r < 1.0$  时, 不同饱和度下水平和竖向位移随入射波频率变化的规律基本相同, 随着饱和度的增加, 水平和竖向运动共振峰值逐渐减小, 峰值频率逐渐减小。当  $S_r=1.0$  时, 水平和竖向位移随入射波频率变化的规律与  $S_r < 1.0$  时有显著变化, 水平和竖向运动的共振峰值也较  $S_r < 1.0$  时有明显减小,

$S_r = 1.0$ 时, 竖向位移放大系数的最大值为3.27,  $S_r = 0$ 时, 竖向位移放大系数的最大值为6.57, 再次证实气相状态的存在对自由场地表面运动影响显著。

### 4.3 非饱和土层刚度变化时饱和度的影响

为了分析非饱和土层的软硬程度对结果的影响, 设非饱和土层中其他参数不变, 通过改变土体骨架的弹性常数, 改变土层的软硬, 土层参数见表 1。图 4 和图 5 分别给出取第 2 组、第 3 组参数时, 无量纲频率  $\omega/\omega_1=5.0$ , 不同饱和度 ( $S_r=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ ) 条件下, 地表水平和竖向位移放大系数随入射角度变化的关系曲线。通过与图 2 的对比, 可以看到, 随着非饱和土层变软, 相同饱和度下, 地表水平、竖向位移均有增加, 水平位移增幅显著, 且当  $S_r < 1.0$  时, 水平位移达到最大值时的入射角度亦逐渐加大, 以  $S_r=0.4$  为例, 第 1 组参数下, 水平位移达到最大值时  $\theta=30^\circ$ , 最大值为 1.67, 第 2 组参数下  $\theta=51^\circ$ , 最大值为 4.1, 第 3 组参数下  $\theta=59^\circ$ , 最大值为 6.0。通过对比图 2, 4, 5, 可知, 当非饱和土层刚度变化时, 饱和度对位移放大系数的影响规律基本相似, 但随着非饱和土层变软, 饱和度变化对位移放大系数的影响更加明显。因此, 当上覆非饱和土层较软时, 应考虑饱和度对自由场地地表运动的影响。

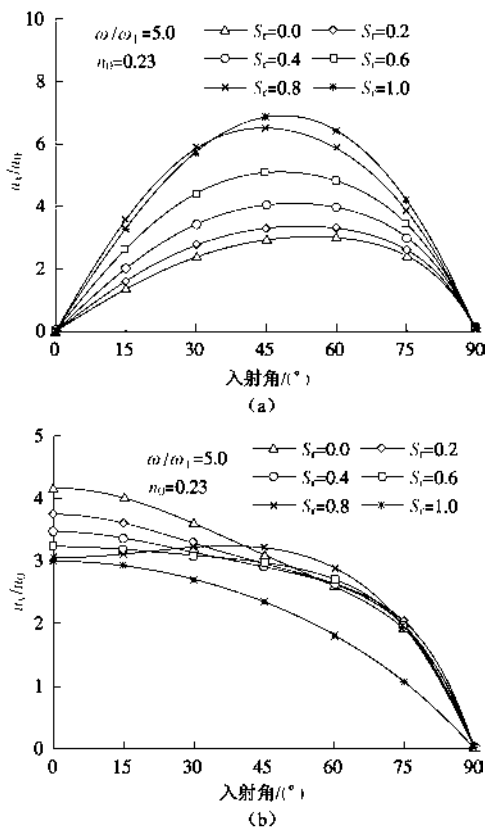


图 4 不同饱和度下地表位移放大系数与入射角关系曲线 (第 2 组参数)

Fig. 4 Surface displacement amplitudes versus P-wave incident angles with different saturations for parameter group 2

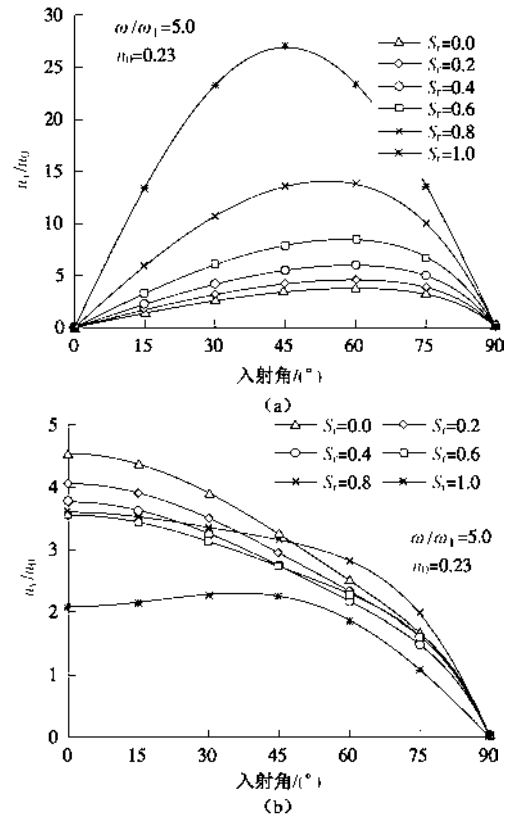


图 5 不同饱和度下地表位移放大系数与入射角关系曲线 (第 3 组参数)

Fig. 5 Surface displacement amplitudes versus P-wave incident angles with different saturations for parameter group 3

### 4.4 非饱和土层孔隙率变化时饱和度的影响

孔隙中气相、液相所占的比例通常用孔隙率和饱和度来衡量。本节中将分析当非饱和土层的孔隙率变化时, 饱和度的变化对地表位移的影响。图 6 和图 7 分别给出了取表 1 中第 2 组参数, 孔隙率分别为  $n_0=0.33$  和 0.43 时, 无量纲频率  $\omega/\omega_1=5.0$ , 不同饱和度 ( $S_r=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ ) 条件下, 非饱和土自由场地地表水平和竖向位移放大系数随入射角度变化的关系曲线。

对比图 4 ( $n_0=0.23$ )、图 6, 7, 可以看出, 随着孔隙率的增加, 当  $S_r=1.0$  时, 地表水平、竖向位移均增加。当  $S_r < 1.0$  时, 相同饱和度下地表水平位移随着孔隙率的增加而减小, 竖向位移随着孔隙率的增加而增大。当非饱和土层孔隙率变化时, 饱和度对水平位移的影响规律相同, 即水平位移随着饱和度增加而增加, 当  $S_r=1.0$  时增幅最大。随着孔隙率的增加, 饱和度变化对地表竖向位移的影响程度更加明显。当  $\theta=0^\circ$ ,  $S_r < 1.0$  时, 不同孔隙率和饱和度对应的地表竖向位移值见表 2。从表中可以看出, 当饱和度较高 ( $S_r=0.8$ ) 时, 孔隙率变化对地表位移影响不大; 随着饱和度的提高, 孔隙率的增加使竖向位移增加明显。孔隙率不变时, 随着饱和度的提高, 竖向位移呈减小趋势。当孔隙率较小时, 竖向位移减幅较小, 且当入

射角较大(当 $n_0=0.23$ ,  $\theta > 45^\circ$ )时, 饱和度对竖向位移影响可忽略; 当孔隙率较大时, 在 $\theta < 90^\circ$ 的范围内, 随着饱和度的提高, 竖向位移均减幅明显。

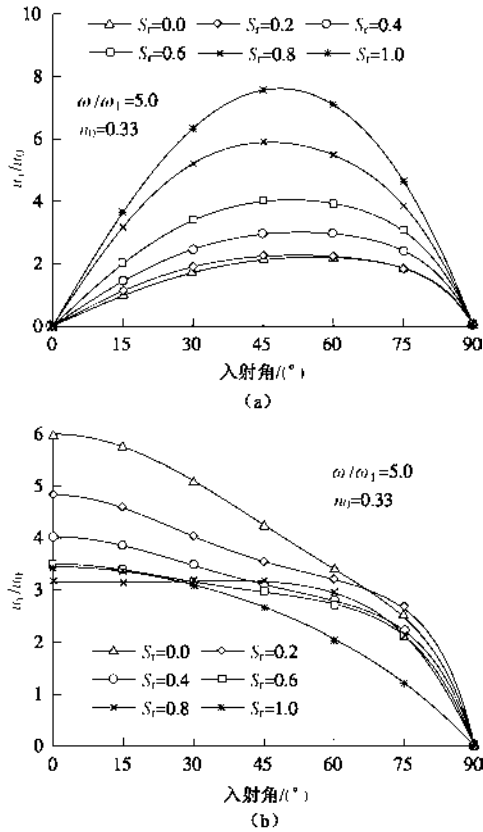


图6 不同饱和度下位移放大系数与入射角关系曲线(第2组参数,  $n_0=0.33$ )

Fig. 6 Surface displacement amplitudes versus P-wave incident angles with different saturations for parameter group 2 and  $n_0=0.33$

表2  $\theta=0^\circ$  时不同孔隙率和饱和度对应的地表竖向位移值  
Table 2 Surface vertical displacements with different saturations and porosities for  $\theta=0^\circ$

$S_r$ 值	$n_0=0.23$	$n_0=0.33$	$n_0=0.43$
$S_r=0.0$	4.17	6.00	13.4
$S_r=0.2$	3.75	4.83	7.00
$S_r=0.4$	3.47	4.02	5.02
$S_r=0.6$	3.23	3.50	3.96
$S_r=0.8$	3.05	3.15	3.28

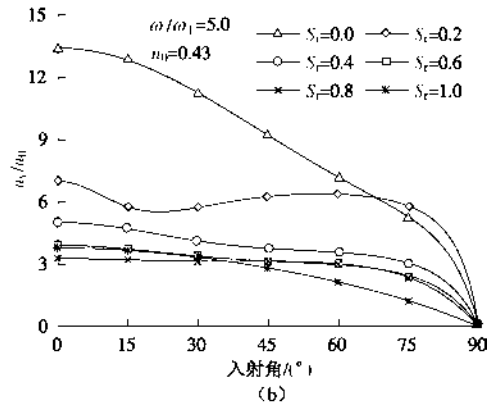
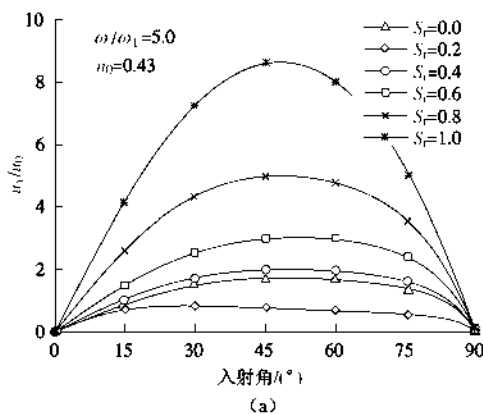


图7 不同饱和度下位移放大系数与入射角关系曲线(第2组参数,  $n_0=0.43$ )

Fig. 7 Surface displacement amplitudes versus P-wave incident angles with different saturations for parameter group 2 and  $n_0=0.43$

### 5 结 论

本文在非饱和孔隙介质波动方程基础上, 建立非饱和土自由场地的分析模型, 推导得到了平面P波入射情况下非饱和土自由场地地震地面运动的解析解。在此基础上, 计算分析了在入射角度、入射波频率和场地土的刚度、孔隙率不同时, 饱和度对场地的地震地面运动的影响, 初步的结论如下:

(1) 上覆土层完全饱和( $S_r=1.0$ )时的地表位移与 $S_r<1.0$ 时的有明显区别, 说明非饱和土层中气相状态的存在对场地地面运动具有较为显著的影响。

(2) 饱和度的变化对场地地面运动的影响与入射角和频率有关。当波垂直入射时, 饱和度对竖向位移的影响最大, 随着入射角增加, 对竖向位移的影响逐渐减小, 对水平位移的影响先增加后减小; 当 $S_r<1.0$ 时, 随着饱和度的增加, 水平和竖向运动共振峰值逐渐减小, 峰值频率逐渐减小。

(3) 饱和度的变化对场地地面运动的影响还与土体的孔隙率和骨架的刚度有关, 针对 $S_r<1.0$ 的情况, 当土体骨架刚度较大(与孔隙水的体积模量同一个量级)且孔隙率较小时, 饱和度的变化对地面运动的影响较小; 当土体骨架刚度较小时, 饱和度的改变对水平位移影响明显; 当土层孔隙率较大时, 饱和度的改变对竖向位移影响显著。

### 参考文献:

[1] BIOT M A. Theory of propagation of elastic wave in fluid-saturated porous soil[J]. Journal of Acoustical Society of America, 1956, 28(2): 168 - 178.  
[2] LI W H, ZHAO C G. Scattering of plane SV waves by cylindrical canyons in saturated porous medium[J]. Soil Dynamics and

- Earthquake Engineering, 2005, **25**(12): 981 - 995.
- [3] LI W H, ZHAO C G, SHI P X. Scattering of plane P waves by circular-arc alluvial valleys with saturated soil deposits[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2005, **25**(12): 997 - 1014.
- [4] 李伟华, 赵成刚. 饱和土沉积谷场地对平面 P 波的散射[J]. 岩土工程学报, 2003, **25**(3): 346 - 351. (LI Wei-hua, ZHAO Cheng-gang. Scattering of plane P waves by alluvial valleys with saturated soil deposits[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, **25**(3): 346 - 351. (in Chinese))
- [5] SCHANZ M. Poroelastodynamics: linear models, analytical solutions, and numerical methods[J]. Applied Mechanics Reviews, 2009, **62**(3): 030803-1-15.
- [6] YANG J. Saturation effects on horizontal and vertical motions in a layered soil-bedrock system due to inclined SV waves[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2001, **21**(6): 527 - 536.
- [7] VARDOULAKIS I, BESKOS D E. Dynamic behavior of nearly saturated porous media[J]. Mechanics of Materials, 1986, **5**(1): 87 - 108.
- [8] SANTOS J E, DOUGLAS J, CORBERO, J, et al. A model for wave-propagation in a porous-medium saturated by a 2-phase fluid[J]. Journal of Acoustical Society of America, 1990, **87**(4): 1439 - 1448.
- [9] TUNCAY K, CORAPCIOGLU M Y. Body waves in poroelastic media saturated by two immiscible fluids[J]. Journal of Geophysical Research, 1996, **101**(B11): 25149 - 25159.
- [10] WEI C F, MURALEETHARAN K K. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids: I Linear poroelasticity[J]. International Journal of Engineering Science, 2002, **40**(16): 1807 - 1833.
- [11] LO W C, MAJER E, SPOSITO G. Wave propagation through elastic porous media containing two immiscible fluids[J]. Water Resources Research, 2005, **41**(2): 1 - 20.
- [12] LU J F, HANYGA A. Linear dynamic model for porous media saturated by two immiscible fluids[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, **42**(9/10): 2689 - 2709.
- [13] 蔡袁强, 李保忠, 徐长节. 两种不混溶流体饱和和岩石中弹性波的传播[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, **25**(10): 2009 - 2016. (CAI Yuan-qiang, LI Bao-zhaong, XU C J. Analysis of elastic wave propagation in sandstone saturated by two immiscible fluids[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, **25**(10): 2009 - 2016. (in Chinese))
- [14] ALBERS B. Analysis of the propagation of sound waves in partially saturated soils by means of a macroscopic linear poroelastic model[J]. Transport in Porous Media, 2009, **80**(1): 173 - 192.
- [15] WEI C F. Static and dynamic behavior of multiphase porous media: governing equations and finite element implementation[D]. Norman: University of Oklahoma, 2001.
- [16] RAVICHANDRAN N. Fully coupled finite element model for dynamics of partially saturated soils[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2009, **29**(9): 1294 - 1304.
- [17] RAVICHANDRAN N, MURALEETHARAN K K. Dynamics of unsaturated soils using various finite element formulations[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2009, **33**(5): 611 - 631.
- [18] MAGHOUL P, GATMIRI B, DUHAMEL D. Boundary integral formulation and two-dimensional fundamental solutions for dynamic behavior analysis of unsaturated soils[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2011, **31**(11): 1480 - 1495.
- [19] MOLDOVAN I D, CAO T D, Teixeira de Freitas J A. Elastic wave propagation in unsaturated porous media using hybrid-Trefftz stress elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014, **97**(1): 32 - 67.
- [20] LO W C. Propagation and attenuation of Rayleigh waves in a semi-infinite unsaturated poroelastic medium[J]. Advances in Water Resources, 2008, **31**(10): 1399 - 1410.
- [21] CHEN W Y, XIA T D, HU W T. A mixture theory analysis for the surface-wave propagation in an unsaturated porous medium[J]. International Journal of Solids and Structures, 2011, **48**(16): 2402 - 2412.
- [22] CHEN W Y, XIA T D, CHEN W, et al. Propagation of plane P-waves at interface between elastic solid and unsaturated poroelastic medium[J]. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2012, **33**(7): 829 - 844.
- [23] TOMAR S K, ASHISH ARORA. Reflection and transmission of elastic waves at an elastic/porous solid saturated by two immiscible fluids[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, **43**(7): 1991 - 2013.
- [24] KUMAR R, MIGLANI A, KUMAR S. Reflection and transmission of plane waves between two different fluid saturated porous half spaces[J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences - Technical Science, 2011, **59**(2): 227 - 234.

## 附录 1:

式 (13) 中  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  的表达式如下:

$$A = M_{SS}^* A_3 + M_{SW} A_1 + M_{SN} A_2, \quad (A1)$$

$$B = M_{SS}^* B_3 + M_{SW} B_1 + M_{SN} B_2 + \gamma_{SS} A_3 - \gamma_{SW} A_1 - \gamma_{SN} A_2, \quad (A2)$$

$$C = M_{SS}^* C_3 + M_{SW} C_1 + M_{SN} C_2 + \gamma_{SS} B_3 - \gamma_{SW} B_1 - \gamma_{SN} B_2,$$



(A3)

$$D = \gamma_{SS} C_3 - \gamma_{SW} C_1 - \gamma_{SN} C_2, \quad (A4)$$

其中,  $M_{SS}^* = M_{SS} + G$ ,  $A_j, B_j, C_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) 的表达式为

$$\begin{aligned} A_1 &= M_{WN} M_{SN} - M_{SW} M_{NN}, \\ A_2 &= M_{SW} M_{WN} - M_{SN} M_{WW}, \\ A_3 &= M_{WW} M_{NN} - M_{WN} M_{WN}; \\ B_1 &= M_{NN} \gamma_{SW} - M_{SW} \gamma_{NN} - M_{WN} \gamma_{SN}, \\ B_2 &= M_{WW} \gamma_{SN} - M_{SN} \gamma_{WW} - M_{WN} \gamma_{SW}, \\ B_3 &= M_{WW} \gamma_{NN} - M_{NN} \gamma_{WW}; \\ C_1 &= \gamma_{NN} \gamma_{SW}, \\ C_2 &= \gamma_{WW} \gamma_{SN}, \\ C_3 &= \gamma_{WW} \gamma_{NN}. \end{aligned}$$

$\gamma_{SS} \gamma_{SW} \gamma_{SN} \gamma_{WW} \gamma_{NN}$  的表达式为

$$\begin{aligned} \gamma_{SS} &= n_0^S \rho^S + \frac{i(\hat{\mu}^W + \hat{\mu}^N)}{\omega}, \quad \gamma_{SW} = \frac{i\hat{\mu}^W}{\omega}, \quad \gamma_{SN} = \frac{i\hat{\mu}^N}{\omega}, \\ \gamma_{WW} &= n_0^W \rho^W + \frac{i\hat{\mu}^W}{\omega}, \quad \gamma_{NN} = n_0^N \rho^N + \frac{i\hat{\mu}^N}{\omega}. \end{aligned}$$

## 附录 2:

式 (13) 中  $a_{ij}$  和  $b_i$  的表达式如下:

$$\begin{aligned} a_{0101} &= -2\mu^r k_{1p}^2 n_{1rp}^2 - \lambda^r k_{1p}^2, \quad a_{0102} = -2\mu^r k_{1s}^2 n_{1rs}^2, \\ a_{0103} &= a_{0106} = k_{2p1}^2 (M_{SN} + M_{SS} + M_{SW}) + 2Gk_{2p1}^2 n_{2p1}^2 + \\ &\delta_1^W k_{2p1}^2 (M_{WN} + M_{SW} + M_{WW}) + \delta_1^N k_{2p1}^2 (M_{SN} + M_{WN} + M_{NN}), \\ a_{0104} &= a_{0107} = k_{2p2}^2 (M_{SN} + M_{SS} + M_{SW}) + 2Gk_{2p2}^2 n_{2p2}^2 + \\ &\delta_2^W k_{2p2}^2 (M_{WN} + M_{SW} + M_{WW}) + \delta_2^N k_{2p2}^2 (M_{SN} + M_{WN} + M_{NN}), \\ a_{0105} &= a_{0108} = k_{2p3}^2 (M_{SN} + M_{SS} + M_{SW}) + 2Gk_{2p3}^2 n_{2p3}^2 + \\ &\delta_3^W k_{2p3}^2 (M_{WN} + M_{SW} + M_{WW}) + \delta_3^N k_{2p3}^2 (M_{SN} + M_{WN} + M_{NN}), \\ a_{0109} &= -a_{0110} = -2Gk_{2s}^2 l_{2ts} n_{2ts}; \\ a_{0201} &= 2\mu^r k_{1p}^2 n_{1rp} l_{1rp}, \quad a_{0202} = -\mu^r k_{1s}^2 (1 - 2l_{1rs}^2), \\ a_{0203} &= -a_{0206} = 2Gk_{2p1}^2 n_{2p1} l_{2p1}, \\ a_{0204} &= -a_{0207} = 2Gk_{2p2}^2 n_{2p2} l_{2p2}, \\ a_{0205} &= -a_{0208} = 2Gk_{2p3}^2 n_{2p3} l_{2p3}, \\ a_{0209} &= a_{0210} = -Gk_{2s}^2 (2l_{2ts}^2 - 1); \\ a_{0301} &= k_{1p} n_{1rp}, \quad a_{0302} = k_{1s} l_{1rs}, \\ a_{0303} &= -a_{0306} = k_{2p1} n_{2p1}, \quad a_{0304} = -a_{0307} = k_{2p2} n_{2p2}, \\ a_{0305} &= -a_{0308} = k_{2p3} n_{2p3}, \quad a_{0309} = a_{0310} = -k_{2s} l_{2ts}; \\ a_{0401} &= -k_{1p} l_{1rp}, \quad a_{0402} = k_{1s} n_{1rs}, \\ a_{0403} &= a_{0406} = k_{2p1} l_{2p1}, \quad a_{0404} = a_{0407} = k_{2p2} l_{2p2}, \\ a_{0405} &= a_{0408} = k_{2p3} l_{2p3}, \quad a_{0409} = -a_{0410} = k_{2s} n_{2ts}; \\ a_{0501} &= k_{1p} n_{1rp}, \quad a_{0502} = k_{1s} l_{1rs}, \\ a_{0503} &= -a_{0506} = k_{2p1} n_{2p1} \delta_1^W, \quad a_{0504} = -a_{0507} = k_{2p2} n_{2p2} \delta_2^W, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{0505} &= -a_{0508} = k_{2p3} n_{2p3} \delta_3^W, \quad a_{0509} = a_{0510} = -k_{2s} l_{2ts} \delta_s^W; \\ a_{0601} &= k_{1p} n_{1rp}, \quad a_{0602} = k_{1s} l_{1rs}, \\ a_{0603} &= -a_{0606} = k_{2p1} n_{2p1} \delta_1^N, \quad a_{0604} = -a_{0607} = k_{2p2} n_{2p2} \delta_2^N, \\ a_{0605} &= -a_{0608} = k_{2p3} n_{2p3} \delta_3^N, \quad a_{0609} = a_{0610} = -k_{2s} l_{2ts} \delta_s^N; \\ a_{0701} &= a_{0702} = 0, \\ a_{0703} &= -\exp(-iHk_{2p1} n_{2p1}) \times (2Gn_{2p1}^2 + M_{SS} + M_{SN} \delta_1^N + M_{SW} \delta_1^W) k_{2p1}^2, \\ a_{0704} &= -\exp(-iHk_{2p2} n_{2p2}) \times (2Gn_{2p2}^2 + M_{SS} + M_{SN} \delta_2^N + M_{SW} \delta_2^W) k_{2p2}^2, \\ a_{0705} &= -\exp(-iHk_{2p3} n_{2p3}) \times (2Gn_{2p3}^2 + M_{SS} + M_{SN} \delta_3^N + M_{SW} \delta_3^W) k_{2p3}^2, \\ a_{0706} &= -\exp(iHk_{2p1} n_{2p1}) \times (2Gn_{2p1}^2 + M_{SS} + M_{SN} \delta_1^N + M_{SW} \delta_1^W) k_{2p1}^2, \\ a_{0707} &= -\exp(iHk_{2p2} n_{2p2}) \times (2Gn_{2p2}^2 + M_{SS} + M_{SN} \delta_2^N + M_{SW} \delta_2^W) k_{2p2}^2, \\ a_{0708} &= -\exp(iHk_{2p3} n_{2p3}) \times (2Gn_{2p3}^2 + M_{SS} + M_{SN} \delta_3^N + M_{SW} \delta_3^W) k_{2p3}^2, \\ a_{0709} &= 2Gk_{2s}^2 l_{2ts} n_{2ts} \exp(-iHk_{2s} n_{2ts}), \\ a_{0710} &= -2Gk_{2s}^2 l_{2ts} n_{2ts} \exp(iHk_{2s} n_{2ts}); \\ a_{0801} &= a_{0802} = 0, \\ a_{0803} &= -2k_{2p1}^2 l_{2p1} n_{2p1} \exp(-iHk_{2p1} n_{2p1}), \\ a_{0804} &= -2k_{2p2}^2 l_{2p2} n_{2p2} \exp(-iHk_{2p2} n_{2p2}), \\ a_{0805} &= -2k_{2p3}^2 l_{2p3} n_{2p3} \exp(-iHk_{2p3} n_{2p3}), \\ a_{0806} &= 2k_{2p1}^2 l_{2p1} n_{2p1} \exp(iHk_{2p1} n_{2p1}), \\ a_{0807} &= 2k_{2p2}^2 l_{2p2} n_{2p2} \exp(iHk_{2p2} n_{2p2}), \\ a_{0808} &= 2k_{2p3}^2 l_{2p3} n_{2p3} \exp(iHk_{2p3} n_{2p3}), \\ a_{0809} &= -k_{2s}^2 \exp(-iHk_{2s} n_{2ts}) (1 - 2l_{2ts}^2), \\ a_{0810} &= -k_{2s}^2 \exp(iHk_{2s} n_{2ts}) (1 - 2l_{2ts}^2); \\ a_{0901} &= a_{0902} = 0, \\ a_{0903} &= -k_{2p1}^2 \exp(-iHk_{2p1} n_{2p1}) \times (M_{SW} + M_{WN} \delta_1^N + M_{WW} \delta_1^W), \\ a_{0904} &= -k_{2p2}^2 \exp(-iHk_{2p2} n_{2p2}) \times (M_{SW} + M_{WN} \delta_2^N + M_{WW} \delta_2^W), \\ a_{0905} &= -k_{2p3}^2 \exp(-iHk_{2p3} n_{2p3}) \times (M_{SW} + M_{WN} \delta_3^N + M_{WW} \delta_3^W), \\ a_{0906} &= -k_{2p1}^2 \exp(iHk_{2p1} n_{2p1}) \times (M_{SW} + M_{WN} \delta_1^N + M_{WW} \delta_1^W), \\ a_{0907} &= -k_{2p2}^2 \exp(iHk_{2p2} n_{2p2}) \times (M_{SW} + M_{WN} \delta_2^N + M_{WW} \delta_2^W), \\ a_{0908} &= -k_{2p3}^2 \exp(iHk_{2p3} n_{2p3}) \times (M_{SW} + M_{WN} \delta_3^N + M_{WW} \delta_3^W), \\ a_{0909} &= a_{0910} = 0; \\ a_{1001} &= a_{1002} = 0, \\ a_{1003} &= -k_{2p1}^2 \exp(-iHk_{2p1} n_{2p1}) \times (M_{SN} + M_{NN} \delta_1^N + M_{WN} \delta_1^W), \\ a_{1004} &= -k_{2p2}^2 \exp(-iHk_{2p2} n_{2p2}) \times (M_{SN} + M_{NN} \delta_2^N + M_{WN} \delta_2^W), \\ a_{1005} &= -k_{2p3}^2 \exp(-iHk_{2p3} n_{2p3}) \times (M_{SN} + M_{NN} \delta_3^N + M_{WN} \delta_3^W), \\ a_{1006} &= -k_{2p1}^2 \exp(iHk_{2p1} n_{2p1}) \times (M_{SN} + M_{NN} \delta_1^N + M_{WN} \delta_1^W), \\ a_{1007} &= -k_{2p2}^2 \exp(iHk_{2p2} n_{2p2}) \times (M_{SN} + M_{NN} \delta_2^N + M_{WN} \delta_2^W), \\ a_{1008} &= -k_{2p3}^2 \exp(iHk_{2p3} n_{2p3}) \times (M_{SN} + M_{NN} \delta_3^N + M_{WN} \delta_3^W), \\ a_{1009} &= a_{1010} = 0; \\ b_{01} &= -a_{0101}, \quad b_{02} = a_{0201}, \quad b_{03} = a_{0301}, \quad b_{04} = -a_{0401}, \\ b_{05} &= a_{0501}, \quad b_{06} = a_{0601}, \quad b_{07} = b_{08} = b_{09} = b_{10} = 0. \end{aligned}$$