

DOI: 10.11779/CJGE201612019

基于弹性有限元的虚拟加载上限分析方法

黄茂松^{1,2}, 李森^{1,2}, 俞剑^{1,2}

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 构造连续相容的塑性变形场是 MSD 法的关键所在, 但塑性变形场难以构造并且无普遍适用的构造方法。本文通过弹性有限元实现了虚拟加载上限法, 真正解决了 MSD 类方法变形场构造困难的问题。其可同时获得给定位移下的荷载及相应的速度场, 并将传统塑性上限分析中耗时的最优化分析等效为迭代计算。应用弹性有限元虚拟加载上限法分析了二维水平受荷桩、条形基础及条形锚板这 3 个土力学的经典问题, 其获得的荷载-位移曲线和弹塑性有限元分析结果一致, 并且其极限承载力逼近公认的塑性解, 验证了本文方法分析整个加载过程的有效性。通过分析加载过程中的速度场, 发现本文方法都是从同一初始速度场开始随迭代逐渐演化, 在极限位移加载量下迭代收敛后获得的速度场和最优塑性破坏机构相似。本文方法可用于研究一些塑性速度场难以构造的复杂问题。

关键词: 虚拟加载方法; 荷载-位移曲线; 应力应变关系; 有限元; 不排水黏土

中图分类号: TU442 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2016)12-2295-07

作者简介: 黄茂松(1965-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 从事岩土工程方面的科研和教学工作。E-mail: mshuang@tongji.edu.cn。

Fictitious loading upper bound limit analysis approach based on elastic FEM

HUANG Mao-song^{1,2}, LI Sen^{1,2}, YU Jian^{1,2}

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: For the MSD method, the most crucial point is the construction of compatible and continuous plastic deformation fields. However, plastic deformation fields are difficult to be obtained, and there exists no universally applicable method for that task. A fictitious loading upper bound limit analysis approach is implemented by the elastic FEM, which practically overcomes the inconvenience of deformation field construction as a prior condition for the MSD method. The proposed method can simultaneously acquire the load and the corresponding velocity field under a prescribed displacement, and the time-consuming optimization process required in the traditional upper bound limit analysis is equivalently converted into iteration here. The proposed method is applied in analyzing the shaft of laterally loaded pile, strip foundation and deep anchor. Judged from the three classic cases in soil mechanics, the load-displacement curves obtained by the proposed method are generally consistent with those obtained by the elasto-plastic FEM, and the obtained ultimate bearing capacities are close to the acknowledged plastic solutions, validating the effectiveness of the proposed method in the entire loading process. Through analyzing the velocity fields in the loading process, the same initial velocity field is identified, which gradually transforms with iteration, and when the limit displacement is applied, it finally becomes to be similar to the plastic collapse mechanisms. The proposed method can be utilized to study complicated problems, whose plastic deformation mechanisms are not acquired yet.

Key words: fictitious loading approach; load-displacement curve; stress-strain relationship; FEM; undrained clay

0 引言

浅基础、桩基础、锚板等均涉及结构与土体的相互作用, 工程师既要保证结构极限状态下传递到岩土体的荷载不超过其承载力, 又要保证在正常使用状态下其变形不超过容许范围。因此建立能够同时获得极限承载力和荷载-位移曲线的分析方法是十分必要的。极限分析法只能获得极限承载力, 而无法获得荷

载-位移曲线, 即使采用极限分析有限元法也是如此。弹塑性有限单元法具有同时获得荷载-位移曲线和极限承载力的能力, 但由于受迭代收敛性、本构模型等弹塑性分析复杂性的限制, 往往难以在工程实践中得

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)课题(2013CB036304); 国家自然科学基金项目(51579177)

收稿日期: 2015-10-16

到广泛应用。为此, Bolton 等^[1]提出了所谓的 MSD (mobilisable strength design) 方法, 其核心思想是通过构造相容且连续的塑性变形场, 将土体内部应变和边界位移联系起来; 土体内部的应力场可单独假设^[2], 并结合平衡条件获得边界荷载。若利用已获得的变形场, 并引入速度场和变形场相似 ($\delta u \propto v$) 的假定, 则可应用塑性上限定理, 由功率平衡方程确定边界荷载^[3]。MSD 法假设土体屈服强度随应变的累积逐步发挥直到达到极限强度, 将塑性上限定理的应用范围扩展到整个加载过程。为简化分析, 其假定变形场在整个加载过程中保持不变且土体强度一致发挥 (由其平均应变水平控制), 所以其实现非常方便甚至可以手算。MSD 法基于塑性理论概念清晰, 计算中引入了土体应力应变关系, 又无需涉及复杂的本构模型计算处理, 该方法的合理性和有效性, 已在挡土墙^[1-2]、浅基础^[3-4]和基坑开挖^[5-7]等基础工程问题中得到验证。MSD 法的关键在于如何构造连续且相容的速度场。塑性变形场控制方程, 可以通过合理的假设在相容条件和边界条件的约束下进行推导获得, 但这种推导方法并不具有普适性。Klar^[8]提出了一种利用原问题对应的弹性解答, 由弹性位移场来近似塑性变形场的方法, 因其变形场难以充分反映塑性特点, 所以获得的承载力偏大。采用弹性解答构造变形场有一定理论依据, 所以仍不失为一个可借鉴思路, 但弹性问题的解答也并非容易获得。目前, 尚未有普遍适用的变形场构造方法。

在研究浅基础沉降时, Osman 等^[4]发现虽然在工程常见的荷载范围内 MSD 法可较好地预测基础沉降, 在初始与极限状态下其获得的沉降低于有限元分析结果。对此, Klar 等^[9]认为 MSD 法中土体内部强度一致发挥与变形场不随加载变化的假设仅是真实情况的一种近似, 为改善其不足将 MSD 法扩展到 EMSD (extended mobilisable strength design) 方法。EMSD 法中引入虚拟加载步, 允许变形场随加载序列的变化, 并通过土单元离散考虑了土体内各处强度的不均匀发挥, 因而有更高的计算精度。目前, EMSD 法已被成功应用于浅基础^[9]、水平受荷桩^[10]和群桩承受竖向荷载^[11]问题的分析。但应用 EMSD 法时, 需对每个土单元在每个虚拟加载步下累积其应变增量, 来确定其在当前加载步下的应变 (强度), 且在每个加载步下的变形场都需由优化获得, 实现过程复杂, 计算量相当大。

在采用 MSD 方法分析二维水平受荷桩时, Klar^[8]利用单层环状弹性介质模型解来构造速度场, Klar 等^[9]基于同样的速度场结合 EMSD 法对该问题进行了分析。但因用于近似塑性破坏机构的弹性变形场较为简单, MSD 与 EMSD 法获得的极限承载力都不够精确。

为了提高计算精度, 有必要采用多层环状弹性介质模型, 但如果继续采用 EMSD 方法, 当层数显著增加时, 优化过程将变得相当困难。为此, 黄茂松等^[12]在 EMSD 方法的基础上发展了一种新方法——弹性虚拟加载上限分析方法, 该方法通过一定数学变换并引入与应变相关的弹性剪切模量, 将上限分析中的功率平衡方程等效转化为弹性虚功方程这样便无需再另外构造塑性变形场, 而可以直接通过弹性分析获得塑性上限解, 进而结合 MSD 方法可以获得完整的荷载-位移曲线, 并成功地应用于水平受荷桩 $p-y$ 曲线分析中。但上述分析方法仍需要首先获得原问题的弹性解析解, 这限制了该方法的推广应用, 为此本文通过弹性有限元实现弹性虚拟加载上限法, 其无需提前构造变形场或获得弹性问题的解析解, 而是在计算过程中自然地得到变形场及其对应的荷载。

1 弹性虚拟加载上限分析方法

文献[12]中以双曲线应力应变关系为例, 给出了弹性虚拟加载上限法的理论推导, 这里也给出其在理想弹塑性应力应变关系下的推导过程。不排水条件下黏土可考虑为 Tresca 材料, Shield 等^[13]已证明 Tresca 材料的上限定理可写为

$$\int_V 2s_u |\dot{\epsilon}_{\max}| dV + \int_A s_u \Delta v_i dA = \int T_i^* v_i dS + \int f_i v_i dV \quad (1)$$

式中 s_u 为 Tresca 材料的最大剪切强度, 对不排水黏土即其不排水抗剪强度; $|\dot{\epsilon}_{\max}|$ 为弹塑性区域 V 中的绝对最大主应变率; Δv_i 为速度间断面 A 上的相对速度; T_i^* 为由内部耗损功率和外力功率相等所确定的上限荷载; v_i 为相容的速度场; S 为外力 T_i^* 作用的边界; f_i 为实际体力荷载。构造相容的速度场 v_i , 并对 v_i 求导得到与其相关的应变率场 $\dot{\epsilon}_i$ 后, 可通过式 (1) 获得极限承载力的一个上限值 T_i^* 。

为了模拟整个加载过程的荷载-位移曲线, 这里采用土体屈服强度随应变累积逐步硬化的假设, 并引入相似条件 $\delta u \propto v$, 注意到速度场连续, 不存在速度间断面, 可将式 (1) 改写为率形式:

$$\delta E = \int_V 2c_m(\epsilon_s) \delta \epsilon_{\max} dV = \int T_i^* \delta u_i dS + \int f_i \delta u_i dV \quad (2)$$

式中, $c_m(\epsilon_s)$ 为由土体内部每点处的最大剪应变 ϵ_s 确定的屈服强度, $\epsilon_s = \epsilon_1 - \epsilon_3$, $\delta \epsilon_{\max} = \max(|\delta \epsilon_1|, |\delta \epsilon_2|, |\delta \epsilon_3|)$ 为绝对最大主应变增量。理想弹塑性应力应变关系可写为

$$c_m(\epsilon_s) = \text{Min}[G_s \epsilon_s, s_u] \quad (3)$$

式中, G_s 为土体剪切弹性模量。对不排水黏土, 泊松比 $\nu_s = 0.5$, $G_s = 2(1 + \nu_s)E_s = 3E_s$, 其中 E_s 为土体弹性模量。对于平面应变问题, $\delta \epsilon_{\max} = |\delta \epsilon_1|$ 或 $|\delta \epsilon_3|$, 由不可压缩条件 $\delta \epsilon_1 + \delta \epsilon_3 = 0$ 可知 $\delta \epsilon_1 \delta \epsilon_3 \leq 0$, 将式 (3)

代入式 (2), 并按以下过程改写为

$$\begin{aligned} \delta E &= \int_V 2\text{Min}[G_{s,u}/\varepsilon_s](\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\delta\varepsilon_{\max} dV \\ &= \int_V 2\text{Min}[G_{s,u}/\varepsilon_s](\varepsilon_1\delta\varepsilon_1 + \varepsilon_3\delta\varepsilon_3) dV \end{aligned} \quad (4)$$

若仅考虑第一个加载步, 即 $\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}$, 并注意平面应变条件下 $\varepsilon_2=0$, 则式 (4) 可表示为

$$\begin{aligned} \delta E &= \int_V 2\text{Min}[G_{s,u}/\varepsilon_s](\delta\varepsilon_1^2 + \delta\varepsilon_2^2 + \delta\varepsilon_3^2) dV \\ &= \int_V 2G[\varepsilon_s(\delta\varepsilon_{ij})]\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV \\ &= \int T_i^* \delta u_i dS + \int f_i \delta u_i dV \end{aligned} \quad (5)$$

若将 $G[\varepsilon_s(\delta\varepsilon_{ij})] = \text{Min}[G_{s,u}/\varepsilon_s]$ 视为弹性剪切模量, 则式 (5) 在形式上是弹性形式的虚功方程, 这样便将求解极限分析上限解的塑性问题转化为求解以 $G(\varepsilon_s)$ 为等效剪切弹性模量, $\nu = 0.5$ 的弹性问题。上述推导过程对不可压缩材料的平面应变问题普遍适用, 在不同本构关系下只是 $G[\varepsilon_s(\delta\varepsilon_{ij})]$ 和 ε_s 的映射关系不同, 实际工程中还可根据现场原位实验来确定 $G[\varepsilon_s(\delta\varepsilon_{ij})]$ 和 ε_s 的函数关系。

传统塑性极限分析中不存在弹性模量的概念, 但经过上述数学转化后的弹性虚拟加载上限法, 在每个加载步都存在等效剪切模量 $G(\varepsilon_s)$, 这样便可以通过平衡方程、位移协调方程和弹性本构方程求得荷载的一个上限 T_i^* 。一般工程材料的模量随应变的累积而降低, 对其应用弹性虚拟加载上限法时, 重复迭代获得的荷载 T_i^* 最终将收敛到原问题的最优上限值, 即通过迭代计算实现一般上限分析中的最优化过程。实际使用时, 可利用与原问题相应的弹性解为基础, 通过迭代获得一个虚拟加载步对应的荷载, 再计算多个虚拟加载步下的荷载进而获得完整的荷载 - 位移曲线, 而无需要另外构造速度场, 但其仍需获得弹性问题的解答。

2 弹性虚拟加载上限法在有限元中的实现

为研究二维水平受荷桩, 黄茂松等^[12]推导了多层环状介质模型的弹性解, 并将其与弹性虚拟加载上限法结合获得了二维桩身 $p - y$ 曲线。基于多层圆环模型的虚拟加载上限法能反映桩身附近出现的应变集中现象, 其计算精度随层数的增多提高, 当只取一层圆环时, 其和 Klar^[8]基于单层环状介质弹性解的 MSD 方法获得的极限承载力一致; 但当圆环层数较多 (100 层) 时, 再增加层数则效果不明显, 这是因为介质按圆环分层只能考虑应变沿径向变化, 计算结果仍偏大。此外, 虽然文献[12]允许变形场在加载过程中变化, 但为避免大量的优化分析, 其模型采用固定外边界, 因此也需要引入刚环来修正初始刚度。Klar 等^[9]在基于

单层环状介质模型的 EMSD 法中采用另一思路, 即认为介质每一点处的应变 (能量耗散) 独立变化, 即离散应变, 但因其未考虑模型的分层, 不能充分反映极限状态下桩周局部范围内的应变集中, 所获得的极限承载力仍偏大较多。MSD 类方法作为简化分析方法, 若同时考虑分层介质、应变离散与可变的变形模式将变得过于复杂而失去意义。对存在与应变相关的等效弹性剪切模量 $G(\varepsilon_s)$ 以及由弹性解答迭代获得上限荷载概念的弹性虚拟加载上限法, 离散应变即是离散刚度, 为了获得荷载还需要介质的整体刚度, 这种先离散后集合的思想与有限单元法一致, 因此可以很自然地想到通过弹性有限元来实现虚拟加载上限法。

MSD 法、EMSD 法和弹性虚拟加载上限法最大的局限性在于, 它们都有很强的针对性, 需对某一具体问题构造速度场或获得弹性解析解。在应用时难以从简单情况入手, 逐步加深对问题机理的认识, 最终解决更接近实际的复杂问题。采用弹性有限元实现弹性虚拟加载上限法不仅可以提高计算精度, 其最大的优点在于相容连续的变形场可以在计算过程中自然地获得, 而无需在计算前构造塑性变形场或获得弹性问题的解析解。如前文中指出, 连续相容变形场的构造既是 MSD 方法的重点又是难点, 本文提出的方法可从两方面解决变形场构造的问题; 一方面其可被用于研究一些变形场仍未被提出的复杂问题; 另一方面所获得的变形场可以加深对结构与土相互作用机理的认识, 进而为解析变形场的构造提出参考。

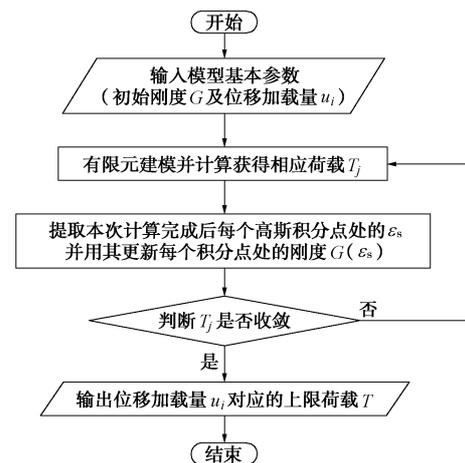


图 1 弹性有限元虚拟加载上限分析流程图

Fig. 1 Flow chart for implementing fictitious loading upper bound limit analysis approach based on elastic FEM

本文用商业化有限元程序 ABAQUS 进行二次开发, 通过数值方法实现弹性虚拟加载上限法。其实现难点在于一般有限元为增量形式, 弹性虚拟加载上限法需进行全量分析, 并且每个迭代步中的弹性剪切模量为上一次迭代应变结果的函数。解决方案为通过

Python 脚本中的命令流语句实现多次建模、提交分析及判断荷载 T_i^* 是否收敛；而根据上一迭代步中每个高斯积分点处的应变结果 ε_s 更新其弹性剪切模量 $G(\varepsilon_s)$ 则通过用户子程序 USDFLD 实现，其具体实现流程见图 1。若需要完整的荷载 - 位移曲线，只需对于一个荷载序列多次重复上述流程即可。

3 算例分析

3.1 二维水平受荷桩

弹性虚拟加载上限法只考虑一个加载步，是一种全量方法，无需累积应变增量使得分析大大简化。这是一种比较大胆的尝试，本文将通过一些经典的岩土工程边界问题验证其有效性。首先利用弹性有限元虚拟加载上限法分析二维水平受荷桩。问题沿加载方法对称，可采用半模型分析，模型尺寸及有限元网格如图 2 所示，左边为完整模型示意图，右边为桩身附近单元的放大图，单元分布从桩周到外边界由密到稀。将桩抽象为一个半径 $r_0 = 1\text{ m}$ 的刚性圆环，桩周土体外边界的半径 $R_e = 60r_0$ ；土体的应力应变曲线分别取为双曲线和理想弹塑性型；不排水强度 $s_u = 10\text{ kPa}$ ，弹性模量 $E = 1500s_u$ ，泊松比 $\nu = 0.499$ ，无量纲刚度系数 $I_r = G/s_u = 500$ ；在弹性有限元虚拟加载上限法及用于验证的弹塑性有限元中土单元选用二维八节点单元（采用减缩积分），并采用 Tresca 屈服准则。

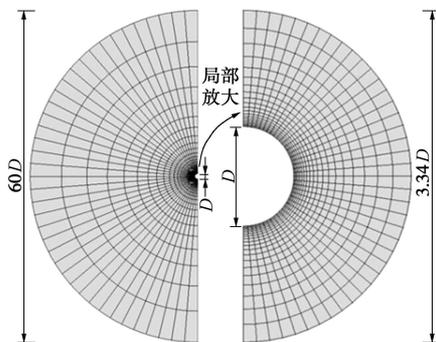


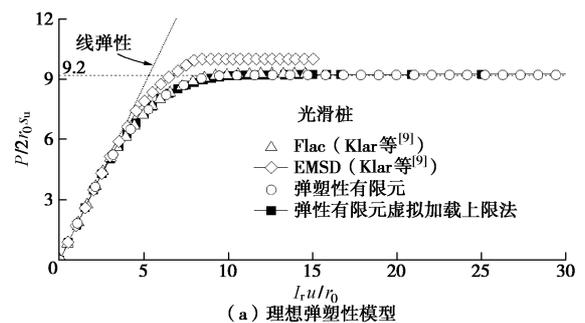
图 2 水平受荷桩有限元模型及网格

Fig. 2 Finite element model and mesh for laterally loaded pile

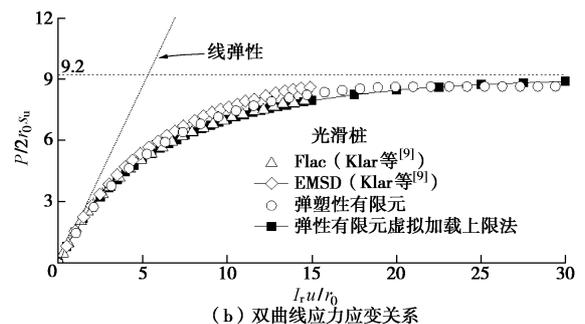
需指出，作为 MSD 类方法的扩展弹性虚拟加载上限法只适用于不排水黏土问题的分析，而无法考虑摩擦角的影响，所以该方法只能模拟完全光滑和完全胶结，这两种在接触面上不存在摩擦的情况。另外，通过弹性有限元实现虚拟加载上限法时，虽然形式上是弹性计算，其实是塑性上限分析，所以要求边界上的耗能为零，否则上限分析将存在漏项。本算例仅分析桩土接触面光滑的情况，位移荷载通过刚体参考点（圆心）均匀施加于桩身，对模型外边界同时约束外边界的水平及竖向位移。

图 3 为利用弹性有限元虚拟加载上限法、EMSD 法、有限差分法 (FLAC) 和弹塑性有限元法 (ABAQUS) 获得的光滑桩荷载 - 位移曲线，其中有限差分法和 EMSD 法的结果来自文献 [9]。Baguelin 等 [14] 研究了在一定外边界下二维水平受荷桩的初始弹性刚度 $K_e = P/\delta$ (P 为荷载， δ 为位移)，当外边界 $R_e = 60r_0$ 时， $K_e = 1.35E_s$ (E_s 为土体弹性模量)，可用其验证本文方法在初始段的合理性。此外，Martin-Randolph 机构 [15] 给出光滑桩的上限值为 9.20，下限值为 9.14，可用其验证本文方法在塑性段的正确性。对中间阶段，则通过弹塑性有限元来验证本文方法。需指出，因 ABAQUS 无自带的双曲线型本构，对双曲线应力应变关系本文采用文献 [13] 中的多折线方法进行模拟。

图 3 表明虽然各种方法都可以较好地模拟水平受荷载的弹性加载阶段，但随着位移加载量增大，ESDM 法逐渐高估荷载，在理想弹塑性应力应变关系下，对光滑桩 ESDM 法获得的归一化极限承载力为 10.06，较于最优上限值 (9.2) 偏大 9.4%；而在整个加载阶段弹性有限元虚拟加载上限法和弹塑性有限元的分析结果基本吻合，本文方法获得的归一化极限承载力分别为 9.27 已非常接近最优塑性上限值。在塑性阶段 EMSD 法获得的荷载偏大，这是由于其所基于的速度场模式不够合理，而构造速度场已非常困难，因此提出无需构造速度场的方法非常必要。值得指出，本文方法无需任何速度场的构造，即可获得与复杂的 Martin-Randolph 机构相近的上限值，体现了本文方法的优越性，并可将其用于其他问题的分析。



(a) 理想弹塑性模型



(b) 双曲线应力应变关系

图 3 光滑桩荷载 - 位移曲线

Fig. 3 Load-displacement curves of smooth pile

在有限元静力分析中没有速度结果, 但本文已引入了位移和速度的相似假设 ($\delta u \propto v$), 那么用边界位移加载量对弹性有限元计算的位移场归一化, 即可得到边界加载单位速度对应的速度场。图 4 给出了理想弹塑性应力应变关系下桩周土体在加载各个阶段的速度场示意图, 其左边为速率云图, 右边速度矢量图。当归一化位移加载量 $I_r u / r_0 = 1.5$ 时, 从图 3 (a) 可看出桩周土体基本处于弹性阶段; 弹性有限元虚拟加载上限法迭代一次即收敛, 且初始加载和迭代收敛对应的速度场保持一致, 其速度场呈发散状, 并过渡均匀。图 3 (a) 表明归一化位移加载量 $I_r u / r_0 = 30$ 时, 荷载 - 位移曲线的斜率趋近于零, 且荷载趋近于塑性极限值, 可见桩周土体已处于塑性充分发展阶段; 本文方法需要多次迭代才收敛, 且初始加载和迭代收敛对应的速度场有显著差别, 前者与弹性速度场一致, 后者在桩周出现明显的速度集中和局部流动, 并迅速衰减。可知在各位移加载量下, 弹性有限元虚拟加载上限法都是从同一初始速度场出发, 通过迭代等效实现以土体内部耗能最小为目标的最优化, 从而确定该位移加载量对应的塑性速度场。在极限位移加载量下, 本文方法通过迭代获得的最优速度场和 Martin-Randolph 机构相似, 验证了其无需提前构造速度场, 即可获得较为准确的塑性破坏机构。

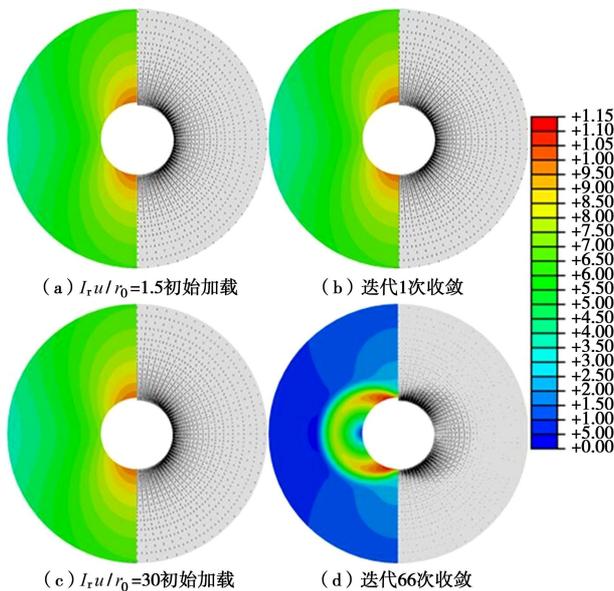


图 4 加载过程中速度场对比图

Fig. 4 Comparison of velocity fields in loading process

3.2 条形基础

条形基础的地基承载力问题是土力学中的经典问题, 本文利用弹性有限元虚拟加载上限法来获得条形基础完整的荷载 - 位移曲线。条形基础仅承受竖向荷载, 利用对称性可采用半模型分析, 模型尺寸及有限

元网格如图 5 所示, 左边为完整模型示意图, 右边为条形基础下单元的放大图, 单元分布从条形基础的脚步向边界由密变稀疏。取基础宽度 $B = 2 \text{ m}$, 水平和竖向的边界分别取为 $10B$ 和 $5B$ 。单元类型和土性参数选取和前述算例保持一致。

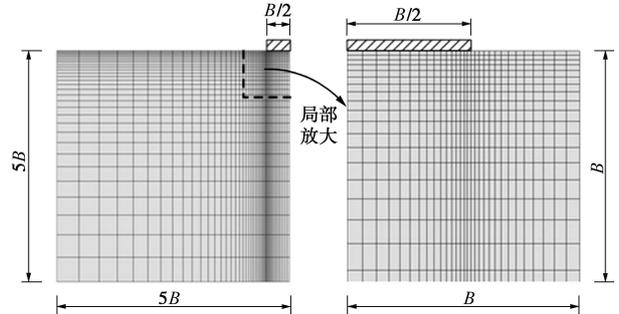


图 5 条形基础有限元模型及网格

Fig. 5 Finite element model and mesh for strip footing

对均质不排水黏土层上基底完全胶结和光滑条形基础, Prandtl 和 Hill 机构^[16]得到的归一化上限地基承载力均为 $2 + \pi$ 。在理想弹塑性应力应变关系下, 本文方法获得的极限地基承载力分别为 5.28(光滑)和 5.29(完全胶结), 比塑性上限解分别高 2.7%与 2.9%。因条形基础可承受的荷载在整个加载阶段都不受基底条件的影响, 图 6 仅给出条形基础基底光滑的情况。图 6 表明本文方法与弹塑性有限元得到的荷载 - 位移曲线基本吻合, 并在极限段接近塑性上限解。

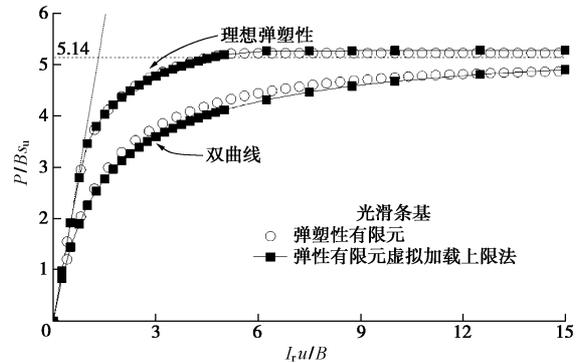


图 6 光滑条形基础荷载 - 位移曲线

Fig. 6 Load-displacement curves of strip footing with smooth base

图 7 为土体应力应变关系为理想弹塑性时, 在极限位移荷载下, 弹性有限元虚拟加载上限法迭代收敛后, 获得的地基在极限状态下的速度场。图 7 中的实线与虚线分别代表 Prandtl 与 Hill 机构, 对完全胶结条基, 本文方法获得的极限速度场与 Prandtl 机构基本吻合; 而对光滑条基, 其更接近于 Prandtl 和 Hill 机构的组合。可根据本文方法获得的速度场为指导, 研究光滑条基下的地基强度发挥模式, 并构造相应的新型速度场。此外, 虽然现有塑性速度场可较好地模拟均质

地基，但对更符合工程实际的非均质地基对应的速度场仍有待进一步研究，而本文方法基于弹性有限元法可方便地用于各种复杂问题的分析，本文不对其展开。

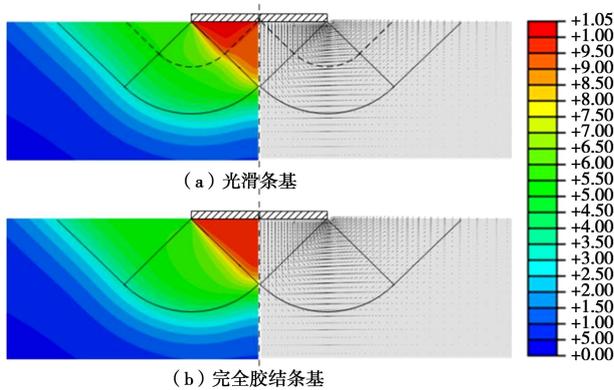


图7 极限状态速度场

Fig. 7 Velocity fields in limit state

3.3 条形锚板

锚定板被广泛用于海港工程及地下工程中，以抵抗液体浮力及开挖引起的隆起荷载。对锚定板极限承载力分析多基于均质地基中的深埋条形锚板模型，对此问题 Rowe 提出了解析上限机构，其对应的归一化极限承载力上限值为 $3\pi+2$ (11.42) [17]。本文采用弹性有限元虚拟加载上限法分析条形锚板问题，并进行弹塑性有限元分析作为对比验证。模型尺寸及有限元网格如图 8 所示，其中锚板宽度 $B=2\text{ m}$ ，水平和竖向的边界分别为 $6B$ 和 $3B$ 。单元类型和土性参数与前述算例一致。

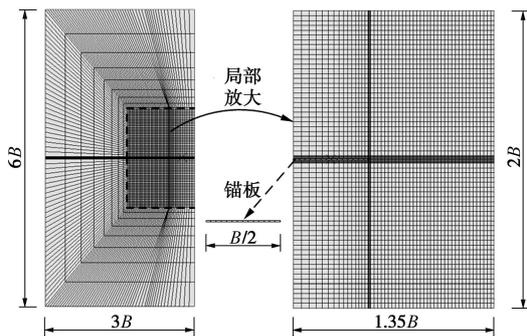


图8 条形锚板有限元模型及网格

Fig. 8 Finite element model and mesh for deep anchor

图 9, 10 分别给出锚板与土体间接触面为完全胶结情况下的荷载 - 位移曲线及极限状态下的速度场形态。图 9 表明在理想弹塑性和双曲线本构下，弹性有限元虚拟加载上限法与弹塑性有限元法给出的结果在极限段和初始段均非常吻合，且二者均可获得与解析上限值可比的极限承载力系数。本文方法获得的深埋锚板承载力系数为 11.57，比弹塑性有限元结果 (11.53) 偏高 0.4%，较解析上限值 (11.42) 偏高 1.4%。

图 10 中虚线代表 Rowe 提出的解析上限机构，其变形模式与弹性有限元虚拟加载上限法通过弹性迭代计算获得的极限速度场非常相似。二者均由三角形刚性区及圆形流动区组成，差别在于本文方法获得的速度场为连续剪流场。

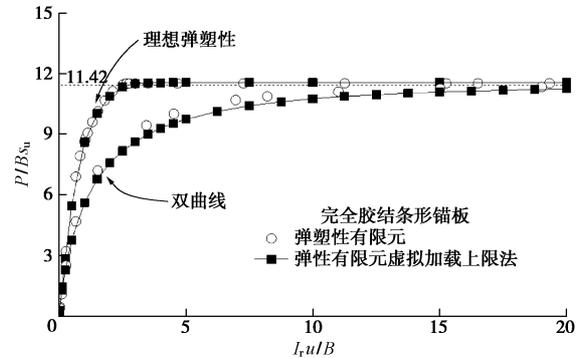


图9 条形锚板荷载 - 位移曲线

Fig. 9 Load-displacement curves of deep anchor

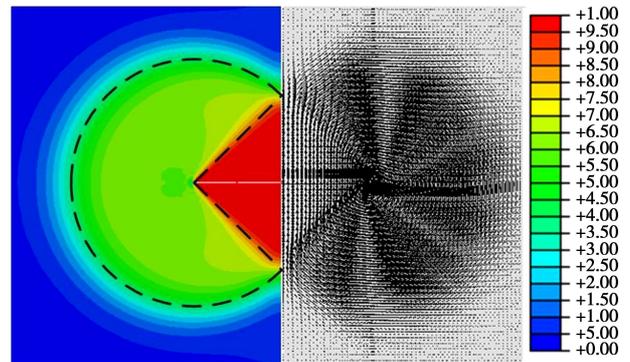


图10 深埋条形锚板极限状态速度场

Fig. 10 Velocity fields in limit state for deep anchor

4 结论与建议

本文通过弹性有限元实现了无需构造速度场的弹性虚拟加载上限分析方法。为验证弹性有限元虚拟加载上限法的有效性，其被应用于二维水平受荷桩、条形基础及条形锚板分析。初步结论与建议如下：

(1) 弹性有限元虚拟加载上限法，通过常规弹性有限元迭代计算，可同时获得给定位移加载量对应的荷载，以及与其相应的塑性速度场。本文方法可基于土单元的应力应变曲线获得结构的荷载 - 位移曲线。此外，其基于全量理论，可直接施加足够大的位移加载量来获得极限承载力，对于只关心极限状态的问题，可提高分析效率，并有较好的收敛性。

(2) 利用本文提出的弹性有限元虚拟加载上限方法，分析了二维水平受荷桩、条形基础和条形锚板问题。对这 3 个土力学的经典问题，本文方法与弹塑性有限元分析结果在整个加载阶段都有较好的一致性，且其极限承载力与塑性上限值相近。此外，在极

限位移加载量下, 弹性有限元虚拟加载上限方法在计算中自然获得的速度场和最优塑性上限速度场相似。这些都验证了对于地基承载力、水平受荷桩及条形锚板问题, 本文方法获得的荷载 - 位移曲线及速度场的合理性。

(3) 弹性有限元虚拟加载上限法, 通过一般弹性有限元实现塑性上限分析, 且速度场的最优化通过迭代实现, 相对一般上限分析计算代价更小。其最大的意义在于作为塑性上限方法, 其无需构造速度场或获得弹性解析解, 因此不受具体问题的限制, 可以用于研究一些上限机构难以构造的复杂问题, 并对其解析速度场的构造提供启示。

参考文献:

- [1] BOLTON M D, POWRIE W. Behaviour of diaphragm walls in clay prior to collapse[J]. *Géotechnique*, 1988, **38**(2): 167 - 189.
- [2] OSMAN A S, BOLTON M D. A new design method for retaining walls in clay[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2004, **41**(3): 451 - 466.
- [3] OSMAN A S, BOLTON M D. Simple plasticity-based prediction of the undrained settlement of shallow circular foundations on clay[J]. *Géotechnique*, 2005, **55**(6): 435-447.
- [4] OSMAN A S, WHITE D J, BRITTO A M, et al. Simple prediction of the undrained displacement of a circular surface foundation on non-linear soil[J]. *Géotechnique*, 2007, **57**(9): 729 - 737.
- [5] OSMAN A S, BOLTON M D. Ground movement predictions for braced excavations in undrained clay[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2006, **132**(4): 465 - 477.
- [6] OSMAN A S, BOLTON M D. Design of braced excavations to limit ground movements[J]. *Proceedings of the ICE-Geotechnical Engineering*, 2006, **159**(3): 167 - 175.
- [7] LAM S Y, BOLTON M D. Energy conservation as a principle underlying mobilizable strength design for deep excavations[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2011, **137**(11): 1062 - 1074.
- [8] KLAR A. Upper bound for cylinder movement using “elastic” fields and its possible application to pile deformation analysis[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2008, **8**(2): 162 - 167.
- [9] KLAR A, OSMAN A S. Load-displacement solutions for piles and shallow foundations based on deformation fields and energy conservation[J]. *Géotechnique*, 2008, **58**(7): 581 - 589.
- [10] KLAR A, RANDOLPH M F. Upper-bound and load-displacement solutions for laterally loaded piles in clays based on energy minimisation[J]. *Géotechnique*, 2008, **58**(10): 815 - 820.
- [11] KLAR A, LEUNG Y F. Simple energy-based method for nonlinear analysis of incompressible pile groups in clays[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2009, **135**(7): 960 - 965.
- [12] 黄茂松, 俞 剑, 张陈蓉. 基于应变路径法的黏土中水平受荷桩 $p - y$ 曲线[J]. *岩土工程学报*, 2015, **37**(3): 400 - 409. (HUANG Mao-song, YU Jian, ZHANG Chen-rong. $p - y$ curves of laterally loaded piles in clay based on strain path approach[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, **37**(3): 400 - 409. (in Chinese))
- [13] SHIELD R T, DRUCKER D C. The application of limit analysis to punch indentation problems[J]. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1953, **20**: 453 - 460.
- [14] BAGUELIN F, FRANK R, SAID Y H. Theoretical study of lateral reaction mechanism of piles[J]. *Géotechnique*, 1977, **27**(3): 405 - 434.
- [15] MARTIN C M, RANDOLPH M F. Upper-bound analysis of lateral pile capacity in cohesive soil[J]. *Géotechnique*, 2006, **56**(2): 141 - 146.
- [16] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. New York: Elsevier, 1975.
- [17] ROWE R K. Soil structure interaction analysis and its application to the prediction of anchor plate behavior[D]. Sydney: University of Sydney, 1978.