

DOI: 10.11779/CJGE201502001

UH 模型系列研究

姚仰平

(北京航空航天大学交通科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 岩土材料的本构模型是岩土工程学科的重要理论基础。合理的本构模型既能定性地揭示岩石的变形强度机制, 也能定量地进行岩土体强度和变形计算。笔者 20 余年来潜心于土的本构模型研究, 取得了以下 3 个方面的理论成果: ①在修正剑桥模型的基础上, 通过引入统一硬化 (unified hardening, UH) 参数, 建立 UH 模型, 该本构模型能够反映饱和超固结土的剪缩、剪胀、硬化、软化和应力路径相关性等特性, 模型所用土性参数与修正剑桥模型完全相同; ②扩展 UH 模型, 使其考虑多种外部因素 (温度、时间和基质吸力)、复杂特性 (各向异性、结构性和小应变特性) 和复杂加载条件 (循环荷载、部分排水即渐近状态) 等的影响; ③提出广义非线性强度准则和满足热力学定律的变换应力三维化方法, 从而实现了本构模型的合理三维化。UH 模型已被嵌入到数值计算软件中, 并被用于分析岩土工程问题。以上研究包括本构建模、强度准则、三维化方法和数值分析等方面, 形成了独具特色的岩土本构理论和应用体系。

关键词: 土; 本构模型; 强度准则; 三维化; 数值分析; UH 模型

中图分类号: TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2015)02-0193-25

作者简介: 姚仰平(1960-), 男, 陕西蓝田人, 博士, 教授, 国家 973 计划首席科学家, 从事土的本构建模、本构模型的工程应用、机场高填方变形与稳定控制等方面的科研工作。E-mail: ypyao@buaa.edu.cn。



Advanced UH models for soils

YAO Yang-ping

(School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: The constitutive model for geomaterials is the important theoretical basis of geotechnical engineering. An advanced constitutive model can qualitatively reveal deformation and strength mechanisms of geomaterials, and also quantitatively calculate the deformation and strength. The author has been devoted to the constitutive model for geomaterials for more than twenty years and obtained the following theoretical achievements: (1) The unified hardening (UH) model is established. Using the same soil parameters with the Cam-clay model, the UH model can describe shear contraction and dilatation, strain hardening and softening as well as stress-path-dependency of saturated overconsolidated clay. (2) The UH model is extended to consider influences of some external factors (temperature, time and suction), complicated characteristics (anisotropy, structural and small-strain properties) and complicated loading paths (cyclic loading, and various drainage conditions, namely asymptotic states). (3) The generalized nonlinear strength criterion and the transformed stress method satisfying the thermodynamic laws are proposed in order to generalize reasonably the constitutive model to the three-dimensional stress space. The UH model has been embedded into the commercial numerical analysis software and applied to the geotechnical engineering analysis. This research framework involves constitutive modeling, strength criterion, generalizing method and numerical analysis, forming a unique constitutive theoretical and applicable system.

Key words: soil; constitutive model; strength criterion; three-dimension; numerical analysis; UH model

0 引 言

土的本构模型, 或称为本构关系, 是反映土的复杂应力应变规律的数学表达式, 是岩土工程学科的重要理论基础。构建岩土本构模型的主要目的是: ①在

定性方面, 揭示土的变形强度机制, 通过对本构模型

基金项目: 国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2014CB047000);

国家自然科学基金项目 (11272031)

收稿日期: 2014-12-22

的理解来更好地把握土的基本特性；②在定量方面，为岩土工程数值分析提供应力应变和强度计算公式。

自20世纪60年代起，众多学者相继开展了土本构模型的研究，提出了数以百计的本构模型，以描述不同类型的土在各种条件下的应力应变和强度特性^[1-27]。在这些已提模型中，最具代表性的是修正剑桥模型（Modified Cam-clay model, MCC模型）。MCC模型的建立充分考虑了土的摩擦性、剪胀性和压硬性^[3]3个基本特性。能够合理描述饱和和正常固结土（重塑黏土）沿三轴压缩路径的剪切变形和压缩变形的耦合，并揭示了土的临界状态特性。MCC模型在解释和描述饱和和正常固结土的基本特性方面具有不可替代的作用。

工程中的土往往由于卸荷、再加荷等复杂加载路径而处于超固结状态。超固结土表现出剪胀、应变软化、高峰值应力比、应力路径相关性等MCC模型无法合理描述的特性。为了描述这些特性，需要建立专门的超固结土本构模型。那么，如何在继承MCC模型特色的基础上发展简单易用的超固结土本构模型呢？笔者等通过提出应力路径无关的统一硬化（unified hardening, UH）参数，实现了上述目标，进而基于UH参数建立了一个超固结土本构模型，称为UH模型。UH模型使用的基本土性参数与MCC模型完全相同，但其能够同时合理描述饱和和超固结土的剪缩、剪胀、硬化、软化、应力路径相关性以及临界状态等复杂应力应变特性。温度、时间和基质吸力等外部因素的变化会改变土的内部结构，进而影响土的应力应变关系。通过把温度、时间和基质吸力等作为外变量引入到UH模型，建立了能够描述温度效应、蠕变和应变率效应、非饱和影响的扩展UH模型。除此之外，还把UH模型扩展到能够考虑土的复杂特性（各向异性、结构性和小应变特性）和复杂加载条件（循环荷载、部分排水即渐近状态）的影响。

近年来，国内关于土的本构理论的研究和交流相对活跃。2010年12月，土的本构模型及强度理论专业委员会成立。2011年8月和2014年5月，专业委员会在兰州和上海召开了第一、二次工作会议。2008年11月和2014年5月，在北京和上海召开了第一、二届全国岩土本构理论研讨会。2013年5月和2014年4月，在桂林和西安举办了岩土本构模型高层论坛。以上活动一定程度推动了岩土本构理论的研究和应用。UH模型及其扩展等系列研究成果，正是在国内这种良好的学术氛围下取得的。随着中国综合国力的提高和基础性科学研究的推进，岩土本构模型的理论研究和工程应用将会取得更大的进展。

1 UH模型

土具有摩擦性、剪胀性和压硬性^[3]。这3个特性

是土与其它材料的根本区别，直接影响土的应力应变关系。能否反映这3种基本特性是本构模型能否合理描述土应力应变关系的关键。

1.1 正常固结土的基本特性和MCC模型

(1) 摩擦性

土的摩擦性的突出表现是剪切强度 q_f 随约束压力 p 的增加而增大，如图1中正常固结Weald黏土的三轴剪切强度试验数据所示。MCC模型使用一条过坐标原点的直线来拟合试验数据，并称该直线为临界状态线（CSL），采用如下公式描述：

$$q_f = Mp \quad (1)$$

式中， M 为临界状态应力比。 M 值的大小既反映了正常固结土摩擦性的强弱，也反映了正常固结土抗剪强度的大小。

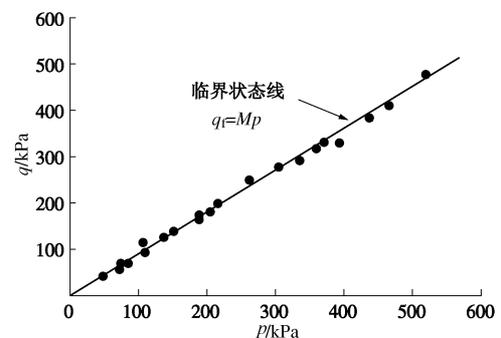


图1 正常固结土三轴剪切强度（数据来自文献[28]）

Fig. 1 Triaxial shear strength of normally consolidated clay

(2) 剪胀性

剪胀性包括剪缩和剪胀两个方面。剪胀性反映了剪切过程中广义剪应力 q 的变化对体积应变 ε_v 的影响，揭示了 p 与 q 在产生应变上的相互耦合。

图2是通过正常固结土常规三轴剪切试验得到的 $\eta - d\varepsilon_v^p/d\varepsilon_d^p$ 关系曲线。其中 η 为应力比， $\eta = q/p$ ， $d\varepsilon_v^p$ 为塑性体积应变增量， $d\varepsilon_d^p$ 为塑性剪应变增量。

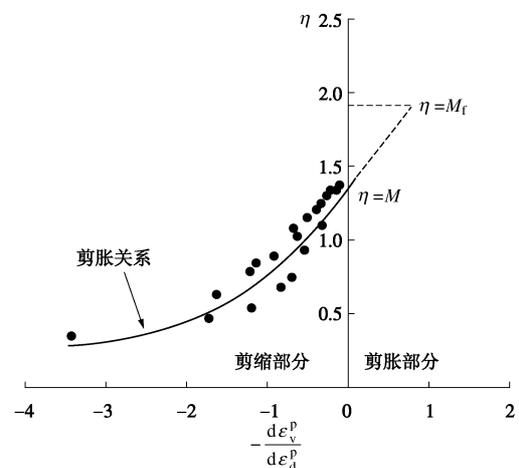


图2 正常固结土剪胀关系（数据来自文献[29]）

Fig. 2 Dilation curve of normally consolidated clay

由图2可知， $d\varepsilon_v^p/d\varepsilon_d^p$ 与 η 具有较强的相关性，

可用数学关系描述, 这一数学关系称为剪胀关系。在 MCC 模型中, 剪胀关系公式如下:

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad (2)$$

图 2 中, 式 (2) 描述的剪胀关系曲线与纵轴的截距为 M 。所以, 该剪胀关系已包含了正常固结土的强度。同时, 式 (2) 也包含了对超固结土剪胀特性的描述, 详见图 2 中的虚线部分。

MCC 模型采用相关联流动法则。根据塑性势面与塑性应变增量的正交条件和剪胀关系 (式 (2)), 可得 MCC 模型的屈服函数和塑性势函数:

$$f = q^2 + M^2 p^2 - M^2 p_x p = 0 \quad (3)$$

式 (3) 描述的屈服面在 $p-q$ 平面内是一个椭圆, 如图 3 所示。式 (3) 中的 p_x 为椭圆屈服面与 p 轴的交点。 p_x 的变化表征了屈服面的硬化。在 MCC 模型中, 屈服面是塑性体积应变 ε_v^p 的等值面, p_x 和 ε_v^p 具有一一对应的关系, 所以 ε_v^p 的变化也表征了屈服面的硬化。 p_x 和 ε_v^p 两者都可称为 MCC 模型的硬化参数。

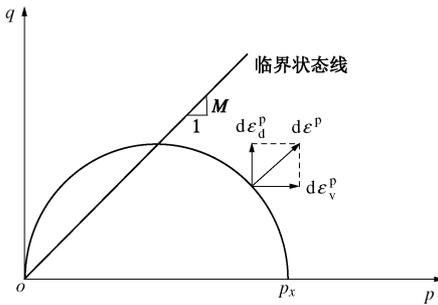


图 3 MCC 模型屈服面和塑性势面

Fig. 3 Yield and potential surfaces of MCC model

(3) 压硬性

压硬性是指土在压缩过程中所表现出的模量随压力增大而增大的特性。以正常固结高岭土的等向压缩试验曲线为例, 如图 4 所示, 孔隙比 e 随 p 的增大而减小。并且, 随着 p 的增大, 相同应力增量 Δp 所引起的孔隙比变化 Δe 越小。MCC 模型中, 使用如下的公式来反映土的压硬性:

$$\varepsilon_v = \frac{\lambda}{1 + e_0} \ln \frac{p_x}{p_{x0}} \quad (4)$$

式中, ε_v 为体积应变, λ 为 $e - \ln p$ 平面内正常压缩线 (NCL) 的斜率, e_0 为土的初始孔隙比, p_{x0} 为 p_x 的初始值。

此外, 根据回弹曲线得到弹性体积应变 ε_v^e 为

$$\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p_x}{p_{x0}} \quad (5)$$

式中, κ 为 $e - \ln p$ 平面内弹性回弹线的斜率。结合式 (4)、(5), 可得正常固结土的塑性体积应变 ε_v^p 和平均应力的关系:

$$\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p_x}{p_{x0}} = c_p \ln \frac{p_x}{p_{x0}} \quad (6)$$

或

$$p_x = p_{x0} \exp \left(\frac{\varepsilon_v^p}{c_p} \right) \quad (7)$$

其中, $c_p = (\lambda - \kappa)/(1 + e_0)$, 表明了土的塑性刚度。

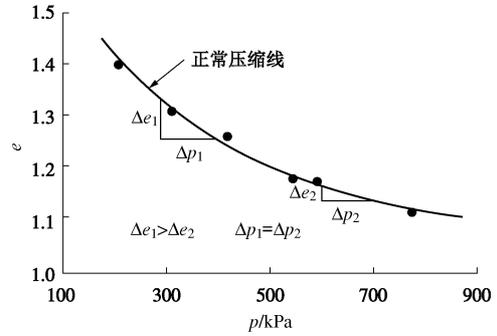


图 4 正常固结土等向压缩曲线 (数据来自文献[30])

Fig. 4 Isotropic compression curve of normally consolidated clay

式 (7) 给出了 p_x 与 ε_v^p 的关系, 实际上是 MCC 模型屈服面的硬化规律。将式 (7) 代入式 (3) 得到 MCC 模型屈服函数的另一种表达形式:

$$f = \ln \frac{p}{p_{x0}} + \ln \left(1 + \frac{q^2}{M^2 p^2} \right) - \frac{1}{c_p} \varepsilon_v^p = 0 \quad (8)$$

综上所述, 可以看出 MCC 模型是以正常固结土的 3 个基本特性为基础建立起来的。下面将从超固结土的 3 个基本特性出发, 介绍超固结土 UH 模型的建立过程。

1.2 超固结土的基本特性和初级 UH 模型

(1) 摩擦性

图 5 显示了超固结土三轴剪切峰值强度的试验结果。图 5 中剪切强度与约束压力基本呈线性正相关关系, 体现了超固结土的摩擦性。图 5 中 p_c 为等孔隙比归一化应力。试验数据可用一条直线拟合, 该直线称为 Hvorslev 强度包线。Hvorslev 线的位置在临界状态线之上, 体现了超固结土峰值强度高于正常固结土强度的性质。

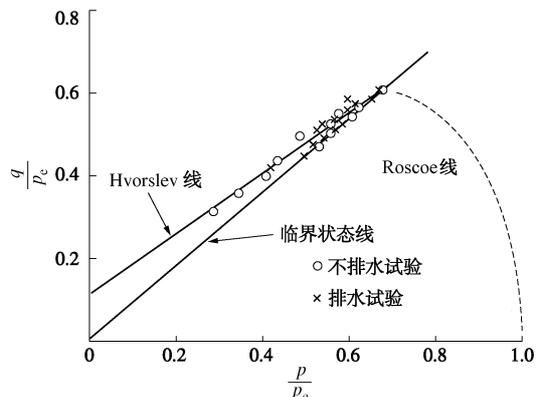


图 5 超固结土三轴剪切峰值强度 (数据来自文献[32])

Fig. 5 Triaxial shear peak strength of overconsolidated clay

图6中, 点A是某个超固结状态点, 相应的应力为 p_x 。点A对应的前期固结压力为点B, 点B的应力为 \bar{p}_x 。设点A对应的峰值应力比为 M_f 。笔者等^[31]根据图6中临界状态线和 Hvorslev 线的几何关系, 推得 M_f 的表达式:

$$M_f = \frac{q_f}{p} = \left(\frac{1}{R_0} - 1 \right) (M - M_h) + M \quad (9)$$

式中, M_h 为 Hvorslev 线的斜率, R_0 为土的初始超固结参数, 描述了加载开始前土的初始超固结度, R_0 为点 A 应力 p_x 与前期固结压力 \bar{p}_x 的比值, 即 $R_0 = p_x / \bar{p}_x$ 。由式(9)可知, 当土为超固结时, $R_0 < 1$, $M_f > M$ 。并且, 超固结程度越大, M_f 与 M 之差越大。当土为正常固结时, $R_0 = 1$, $M_f = M$ 。

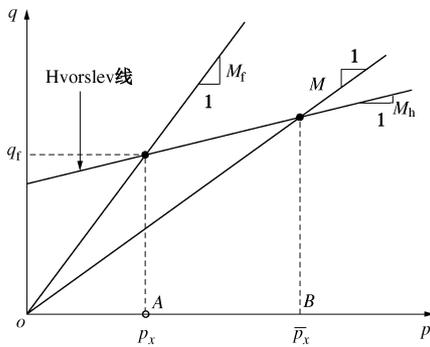


图6 超固结土峰值应力比 M_f 推导示意图

Fig. 6 Schematic diagram of derivatation for peak stress ratio M_f of overconsolidated clay

(2) 剪胀性

正常固结土只发生剪缩, 不发生剪胀。因此, 图2中正常固结土的剪胀关系试验曲线仅有剪缩 ($d\varepsilon_v^p / d\varepsilon_d^p > 0$) 部分。但对于超固结土而言, 存在剪胀 ($d\varepsilon_v^p / d\varepsilon_d^p < 0$) 部分, 如图2中虚线所示。如前所述, MCC 模型的剪胀关系式(2)也能描述 $d\varepsilon_v^p / d\varepsilon_d^p < 0$ 的规律。因此, 在超固结土本构模型中仍采用式(2)所示的剪胀关系, 屈服面方程仍为式(3)所示的椭圆公式。

在对超固结土进行三轴剪切过程中, 开始时应力较小, 土发生硬化剪缩, p_x 和 ε_v^p 均增大, 如图7所示。然而, 当应力比 η 超过特征状态应力比 (假定为临界状态应力比 M) 后, 土发生硬化剪胀。此时, 土仍然处于硬化状态, 故而 p_x 增大。但是, 由于土发生剪胀, ε_v^p 则减小。这导致 p_x 和 ε_v^p 的变化趋势在剪胀区不一致。MCC 模型中 p_x 和 ε_v^p 的一一对应的单调关系在剪胀区显然不再适用。因此, 需要一个同时适用于剪缩和剪胀的新硬化参数来取代 ε_v^p , 假设该新硬化参数为 H 。根据硬化参数的定义, H 应该具有以下特征: ①在同一个屈服面上, H 是等值的, 和 p_x 具有一一对应的单调关系; ② H 是应力路径无关的; ③硬化

参数是描述土硬化程度的内参量, 而土的硬化是由塑性应变引起的, 因此, H 应该和土的塑性应变有关。假设 H 是塑性体积应变增量 $d\varepsilon_v^p$ 和塑性剪应变增量 $d\varepsilon_d^p$ 的积分函数:

$$H = \int [c_1(p, q) d\varepsilon_v^p + c_2(p, q) d\varepsilon_d^p] \quad (10)$$

式中, $c_1(p, q)$ 和 $c_2(p, q)$ 为应力的函数, 表明了土的应力状态。 $d\varepsilon_v^p$ 和 $d\varepsilon_d^p$ 满足式(2)所示的剪胀关系, 所以可进一步将式(10)写为

$$H = \int \left[c_1(p, q) d\varepsilon_v^p + c_2(p, q) \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} d\varepsilon_v^p \right] = \int c(p, q) d\varepsilon_v^p \quad (11)$$

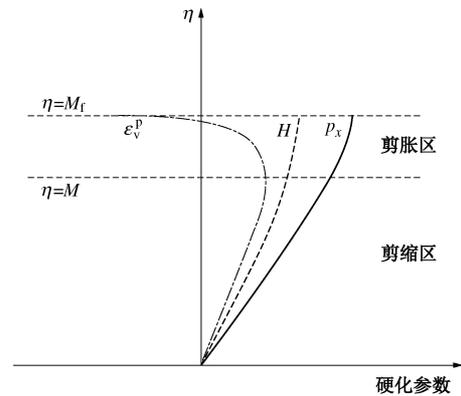


图7 超固结土硬化参数随剪切的演化规律

Fig. 7 Evolution of hardening parameter of overconsolidated clay with shearing

用式(11)中的 H 代替式(7)中的 ε_v^p / c_p , 得到初级 UH 模型的硬化规律如下:

$$p_x = p_{x0} \exp(H) \quad (12)$$

将式(12)代入式(3)中, 可得屈服函数:

$$f = \ln \frac{p}{p_{x0}} + \ln \left(1 + \frac{q^2}{M^2 p^2} \right) - H = 0 \quad (13)$$

微分式(13), 并结合塑性体积应变增量的计算式, 得到:

$$df = \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq - c(p, q) \Lambda \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad (14)$$

由式(14)解得塑性标量因子 Λ :

$$\Lambda = \frac{1}{c(p, q)} \frac{\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq}{\frac{\partial f}{\partial p}} \quad (15)$$

利用式(13)、(15)可得三轴等 p 路径中的塑性剪应变增量 $d\varepsilon_d^p$:

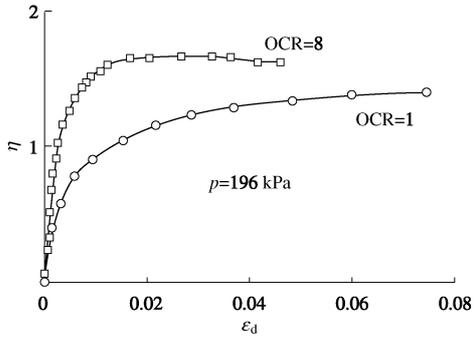
$$d\varepsilon_d^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{1}{c(p, q)} \frac{1}{p} \frac{4\eta^2}{M^4 - \eta^4} dq \quad (16)$$

图8是正常固结土和超固结土三轴等 p 剪切试验的数据。由图8(a)可知, 在不考虑应变软化的情况下, 正常固结土和超固结土的应力应变曲线的形状类

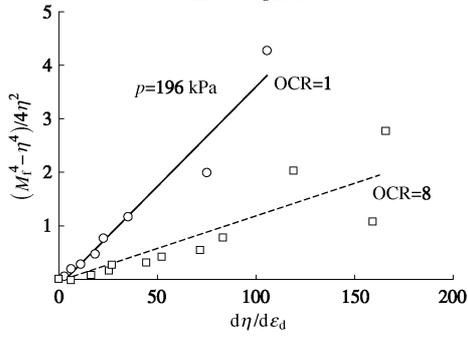
似，只是在初始刚度和峰值应力比上有区别。基于这种相似性，根据正常固结土的 $d\varepsilon_d^p$ 公式（式（17）），笔者等^[33]用类推的方法提出了式（18）所示的超固结土的 $d\varepsilon_d^p$ 表达式：

$$d\varepsilon_d^p = c_p \frac{1}{p} \frac{4\eta^2}{M_f^4 - \eta^4} dq \quad (\text{正常固结土}), \quad (17)$$

$$d\varepsilon_d^p = \rho \frac{1}{p} \frac{4\eta^2}{M_f^4 - \eta^4} dq \quad (\text{超固结土}). \quad (18)$$



(a) $\eta - \varepsilon_d$ 曲线



(b) $(M_f^4 - \eta^4)/4\eta^2 - d\eta/d\varepsilon_d$ 曲线

图 8 正常固结土和超固结土的三轴等 p 剪切试验结果（数据来自文献^[34]）

Fig. 8 Experimental data of triaxial constant- p compression tests on normally consolidated and overconsolidated clay

式（18）在形式上与式（17）类似，只是用超固结土的塑性刚度参数 ρ 和强度参数 M_f 代替了正常固结土的塑性刚度参数 c_p 和强度参数 M 。式（17）、（18）可被整理成如下线性形式：

$$\frac{M^4 - \eta^4}{4\eta^2} = c_p \frac{d\eta}{d\varepsilon_d^p}, \quad (19)$$

$$\frac{M_f^4 - \eta^4}{4\eta^2} = \rho \frac{d\eta}{d\varepsilon_d^p}. \quad (20)$$

对图 8（a）的试验结果进行重新整理，结果如图 8（b）所示。发现超固结土和正常固结土的 $(M_f^4 - \eta^4)/4\eta^2 - d\eta/d\varepsilon_d$ 关系的试验点大致落在两条斜率不同的直线附近。基本验证了式（19）、（20）的相似性，也就说明了式（18）的合理性。

结合式（16）、（20）可得

$$c(p, q) = \frac{1}{\rho} \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4}. \quad (21)$$

将式（21）代入式（11）可得

$$H = \int \frac{1}{\rho} \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p. \quad (22)$$

式（22）虽然给出了 H 的基本形式，但其中塑性刚度参数 ρ 的具体表达式待定，尚需根据超固结土的压硬性试验规律求得。

（3）压硬性

根据式（13）、（15）和（22），可得超固结土在等向压缩路径中的塑性体积应变增量 $d\varepsilon_v^p$ ：

$$d\varepsilon_v^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial p} = \rho \frac{M^4}{M_f^4} \frac{dp_x}{p_x}. \quad (23)$$

假设 $e - \ln p$ 空间内超固结土再压缩曲线的斜率为 $\bar{\lambda}$ 。根据试验观察， $\bar{\lambda}$ 介于正常压缩线斜率 λ 和回弹线斜率 κ 之间，如图 9 所示。 $\bar{\lambda}$ 的大小与土的初始超固结程度有关。则超固结土在再压缩过程中的 $d\varepsilon_v^p$ 可表示为

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\bar{\lambda} - \kappa}{1 + e_0} \frac{dp_x}{p_x}. \quad (24)$$

对比式（23）、（24）可得

$$\rho = \frac{M_f^4}{M^4} \frac{\bar{\lambda} - \kappa}{1 + e_0}. \quad (25)$$

将式（25）代入式（22），得到 H 表达式的具体形式^[35]：

$$H = \frac{1 + e_0}{\bar{\lambda} - \kappa} \int \frac{M^4}{M_f^4} \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p. \quad (26)$$

式（26）还可写为

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\bar{\lambda} - \kappa}{1 + e_0} \frac{M_f^4}{M^4} \frac{M^4 - \eta^4}{M_f^4 - \eta^4} dH. \quad (27)$$

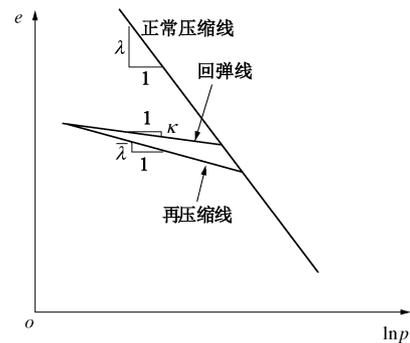


图 9 超固结土的再压缩线示意图

Fig. 9 Schematic diagram of reloading curve of overconsolidated clay

因为在加载过程中， $dH \geq 0$ 始终成立，所以根据式（27）可知：当 $\eta < M < M_f$ 时， $d\varepsilon_v^p > 0$ ，土发生剪缩；当 $\eta = M$ 时， $d\varepsilon_v^p = 0$ ，此时为从剪缩到剪胀的特征状态；当 $M < \eta < M_f$ 时， $d\varepsilon_v^p < 0$ ，土发生剪胀；当 $\eta = M_f$ 时， $dH = 0$ 且 $d\varepsilon_v^p = 0$ ，屈服面停止扩张，此时超固结土达到其峰值强度 M_f 。可见 H 可以统一地描述

超固结土从剪缩到剪胀的整个过程。所以 H 被称为统一硬化参数。此外，由于 H 的公式中包含了峰值应力比 M_f ，所以硬化参数 H 还考虑了超固结土的强度特性。

在上述推导过程中， M_f 是取决于初始超固结度的常数。采用常数 M_f 的统一硬化参数 H 仅能对超固结土的剪胀性进行初步考虑。所以把采用这个统一硬化参数 H 的本构模型称为初级 UH 模型。

1.3 UH 模型

(1) 简化 H

对式 (26) 进行变换可得

$$H = \frac{1}{c_p} \int \frac{\lambda - \kappa}{\bar{\lambda} - \kappa} \frac{M^4}{M_f^4} \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p, \quad (28)$$

式中， $(\lambda - \kappa)/(\bar{\lambda} - \kappa) \geq 1$ ， $M^4/M_f^4 \leq 1$ 。分析发现 $(\bar{\lambda} - \kappa)/(\lambda - \kappa)$ 与 M^4/M_f^4 基本处于同一数量级。因此，近似取 $(\bar{\lambda} - \kappa)/(\lambda - \kappa) \approx M^4/M_f^4$ 。这样，式 (28) 可简化为

$$H = \frac{1}{c_p} \int \frac{M^4 - \eta^4}{M_f^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p. \quad (29)$$

(2) 考虑应变软化

因为初级UH模型中取 M_f 为常数，还不能考虑超固结土的应变软化特性。所以，笔者等^[36]通过引入当前屈服面和参考屈服面(图10)，并利用当前屈服面和参考屈服面随加载不断接近的特性来描述超固结度的衰化和峰值强度 M_f 的弱化，进而反映超固结土的应变软化特性。建立在考虑 M_f 弱化基础上的超固结土本构模型，称为UH模型。UH模型的当前屈服面代表着土的超固结状态，采用 H 作为硬化参数，其方程仍然是式 (13)。

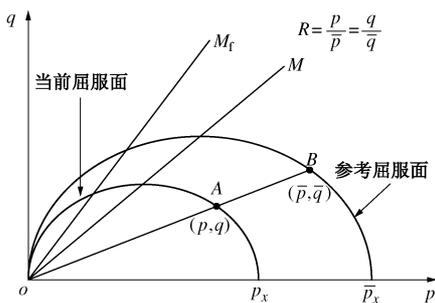


图 10 UH 模型的当前屈服面和参考屈服面

Fig. 10 Current and reference yield surfaces of UH model

UH 模型的参考屈服面代表土的正常固结状态，和正常固结土 MCC 模型一样，采用 ε_v^p 作为硬化参数，其方程为

$$\bar{f} = \ln \frac{\bar{p}}{\bar{p}_{x0}} + \ln \left(1 + \frac{\bar{q}^2}{M^2 \bar{p}^2} \right) - \frac{1}{c_p} \varepsilon_v^p = 0, \quad (30)$$

式中， \bar{p} 和 \bar{q} 为参考屈服面上参考应力点 B 的应力，如图 10 所示。参考应力点 B (\bar{p}, \bar{q}) 和当前应力点 A (p, q) 具有相同的应力比。

使用当前屈服面和参考屈服面的相似比表征土的超固结程度。结合当前屈服函数和参考屈服函数，推得了随加载不断变化的超固结参数 R ，

$$R = \frac{p_x}{\bar{p}_x} = \frac{p}{\bar{p}_{x0}} \left(1 + \frac{q^2}{M^2 p^2} \right) \exp \left(-\frac{\varepsilon_v^p}{c_p} \right). \quad (31)$$

由式 (31) 计算的 R 不再是一个常数，和当前应力、 ε_v^p 有关，是随加载不断变化的量。

采用了变化的 R 后，式 (9) 的 M_f 计算公式变为

$$M_f = \left(\frac{1}{R} - 1 \right) (M - M_h) + M. \quad (32)$$

随着再加载的进行，土的超固结度不断减小， R 增大， M_f 不断减小，直至土变为正常固结， $R=1$ ， $M_f=M$ 。

UH 模型的其它公式均与初级 UH 模型相同。

1.4 修正 UH 模型

式 (32) 所表示的 M_f 在 R 很小时可能会大于零拉力线斜率 3，违背土不能抗拉的特性。因此，笔者等^[37-38]采用一条抛物线拟合土的零拉力线和 Hvorslev 线，如图 11 所示，提出了修正的 M_f 公式：

$$\left. \begin{aligned} M_f &= \frac{q_f}{p} = 6 \left[\sqrt{\frac{\chi}{R} \left(1 + \frac{\chi}{R} \right)} - \frac{\chi}{R} \right], \\ \chi &= \frac{M^2}{12(3-M)}, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

由式 (33) 计算的 M_f 始终小于 3。采用修正 M_f 计算式的 UH 模型，称为修正 UH 模型。与式 (9) 相比，式 (33) 不再需要参数 M_h ，这使得修正 UH 模型用到的土性参数与 MCC 模型完全相同，进一步增强了模型的实用性。

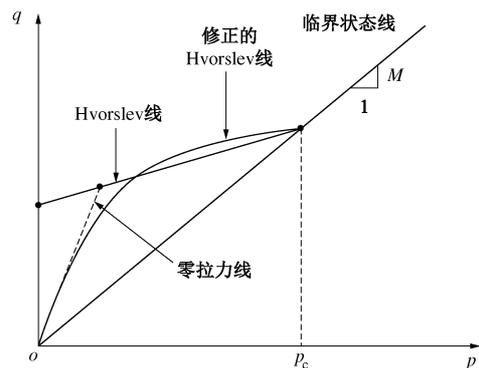
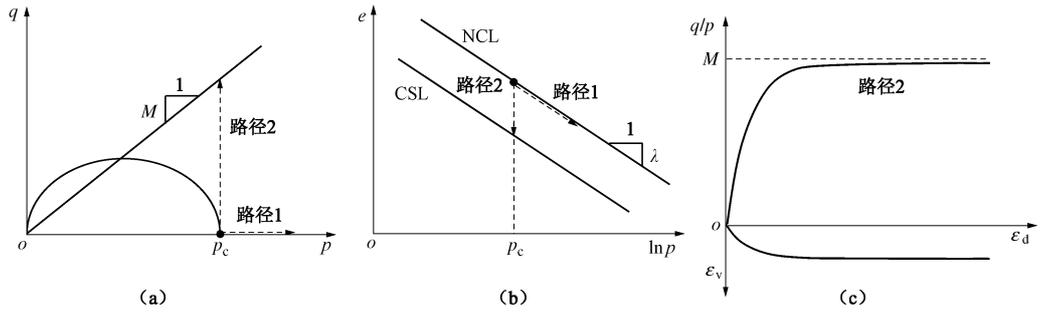


图 11 修正的 Hvorslev 线

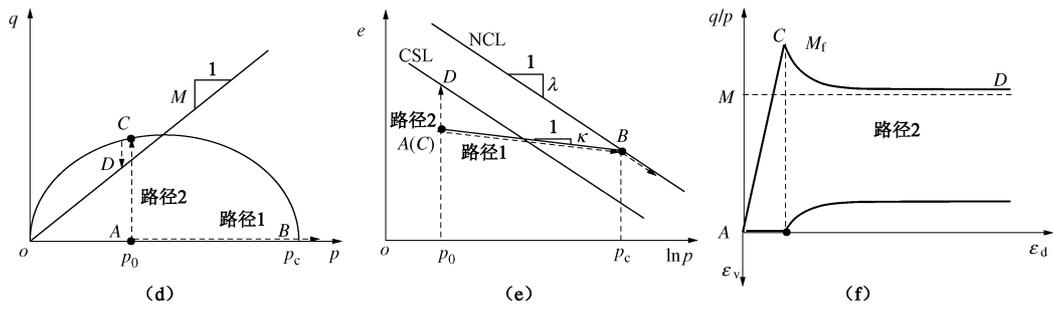
Fig. 11 Modified Hvorslev envelope

除了采用修正的 M_f 公式外，修正UH模型的其它公式均与UH模型相同。根据胡克定律、屈服函数和相关联流动法则，可推得修正UH模型的二维弹塑性本构方程：

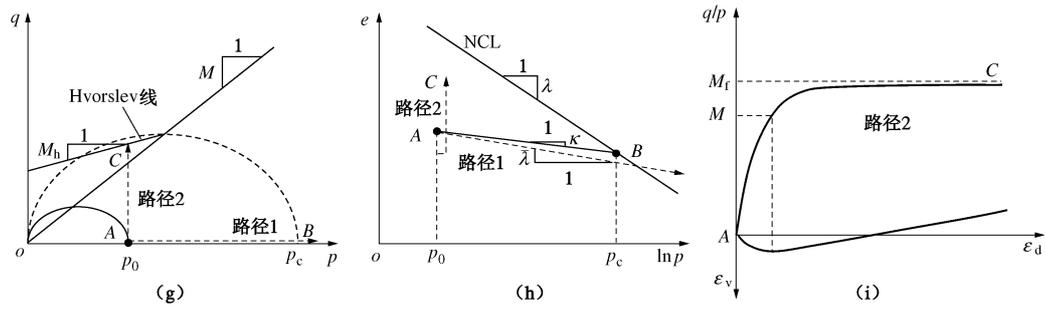
$$\begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \cdot A_1 & 3KG \cdot A_2 \\ 3KG \cdot A_2 & 3G \cdot A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_v \\ d\varepsilon_d \end{bmatrix}, \quad (34)$$



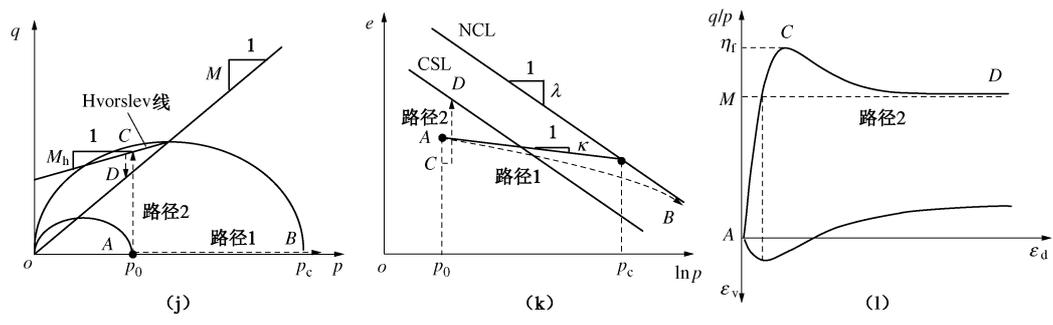
(a) ~ (c) MCC模型、初级UH模型和修正UH模型对正常固结土的预测



(d) ~ (f) MCC模型对超固结土的预测



(g) ~ (i) 初级UH模型对超固结土的预测



(j) ~ (l) 修正UH模型对超固结土的预测

图 12 MCC 模型、初级 UH 模型和修正 UH 模型的预测结果

Fig. 12 Predicted results of MCC model, elementary UH model and modified UH model

式中, K 为弹性体积模量, G 为弹性剪切模量,

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{(M_r^4 - \eta^4)p + 12Gc_p\eta^2}{(M_r^4 - \eta^4)p + 12Gc_p\eta^2 + Kc_p(M^2 - \eta^2)^2}, \\ A_2 &= \frac{-2c_p(M^2 - \eta^2)\eta}{(M_r^4 - \eta^4)p + 12Gc_p\eta^2 + Kc_p(M^2 - \eta^2)^2}, \\ A_3 &= \frac{(M_r^4 - \eta^4)p + Kc_p(M^2 - \eta^2)^2}{(M_r^4 - \eta^4)p + 12Gc_p\eta^2 + Kc_p(M^2 - \eta^2)^2}. \end{aligned} \right\} (35)$$

1.5 MCC 模型、初级 UH 模型和修正 UH 模型预测结果对比

图 12 是 MCC 模型、初级 UH 模型和修正 UH 模型对正常固结土和超固结土等向压缩路径和三轴等 p 剪切路径的预测结果。由于 UH 模型和修正 UH 模型的计算结果几乎相同, 所以此处没有给出 UH 模型的计算结果。图 12 中 p_0 为超固结土的初始平均应力, p_c 为前期固结压力。

图 12 (a) ~12 (c) 是 MCC 模型、初级 UH 模型和修正 UH 模型对正常固结土的预测结果, 3 个模型的预测结果完全一致。

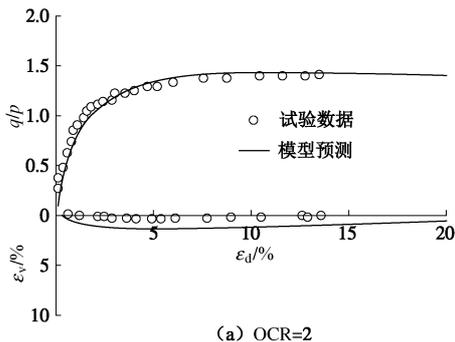
图 12 (d) ~12 (f) 是 MCC 模型对超固结土的预测。MCC 模型的预测结果存在以下问题: ①试验中, 超固结土的变形自始至终为弹塑性, 而 MCC 模型预测的超固结土变形在应力屈服以前为完全弹性, 如图 12 (d) 中 AC 路径所示; ②图 12 (e) 中等向压缩曲线为折线, 斜率存在突变; ③图 12 (f) 中应力应变曲线存在尖点, 而且计算的峰值应力比远高于试验值; ④无法预测体缩变形, 如图 12 (f) 中 $\varepsilon_v - \varepsilon_d$ 曲线所示。

图 12 (g) ~12 (i) 是初级 UH 模型对超固结土的预测。图 12 (h) 中等向压缩曲线 (路径 1) 斜率大于 κ , 说明初级 UH 模型能够预测塑性变形。初级 UH 模型还能够预测体缩变形, 如图 12 (i) 中的 $\varepsilon_v - \varepsilon_d$ 曲线所示。而且, 初级 UH 模型: ①预测的等向压缩曲线最终不能收敛于 NCL, 如图 12 (h) 所示; ②不能反映临界状态, 如图 12 (g) 中应力路径和图 12 (i) 中 $\varepsilon_v - \varepsilon_d$ 曲线所示; ③不能反映应变软化特性, 如图 12 (i) 中应力应变曲线所示。

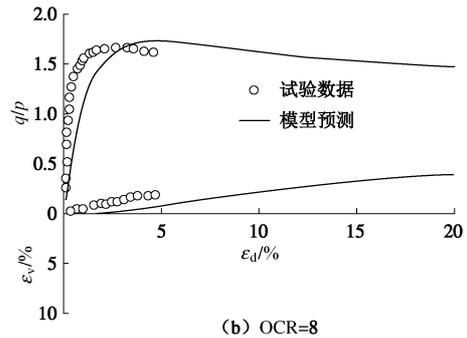
图 12 (j) ~12 (l) 是修正 UH 模型对超固结土的预测结果。修正 UH 模型克服了 MCC 模型和初级 UH 模型的问题: ①如图 12 (k) 所示, 超固结土等向压缩曲线是一条平滑曲线, 开始时其斜率大于 κ 小于 λ , 随着加载其斜率逐渐增大, 最终等向压缩曲线趋近于 NCL; ②图 12 (l) 中, 剪应力应变曲线和 $\varepsilon_v - \varepsilon_d$ 曲线都是光滑曲线。而且, 剪应力应变曲线能够反映应变软化特性, $\varepsilon_v - \varepsilon_d$ 曲线既有剪缩部分, 又有剪胀部分; ③如图 12 (j) 所示, 应力路径终止于临界状态线, 并且, 图 12 (l) 中的 q/p 和 ε_v 最终均趋于恒值, 这都说明修正 UH 模型能够合理反映临界状态特性。

1.6 模型预测

图 13 显示了轻微超固结 (OCR=2) 和重超固结 (OCR=8) Fujinonmori 黏土三轴剪切的试验结果以及修正 UH 模型的预测结果。试验结果和预测结果的对比表明, 修正 UH 模型能够对超固结土的应力应变关系和体积变化做到较好描述, 而且能够合理反映超固结土的应变软化和剪胀特性。



(a) OCR=2



(b) OCR=8

图 13 三轴排水剪切试验应力应变曲线 (数据来自文献[34])

Fig. 13 Stress-strain curves of triaxial compression tests

图 14 还显示了超固结土三轴不排水剪切试验和预测的应力路径。从试验结果可知, 随着超固结度增大, 土表现出越来越明显的剪胀趋势, 且修正 UH 模型的预测结果能够反映这一趋势。

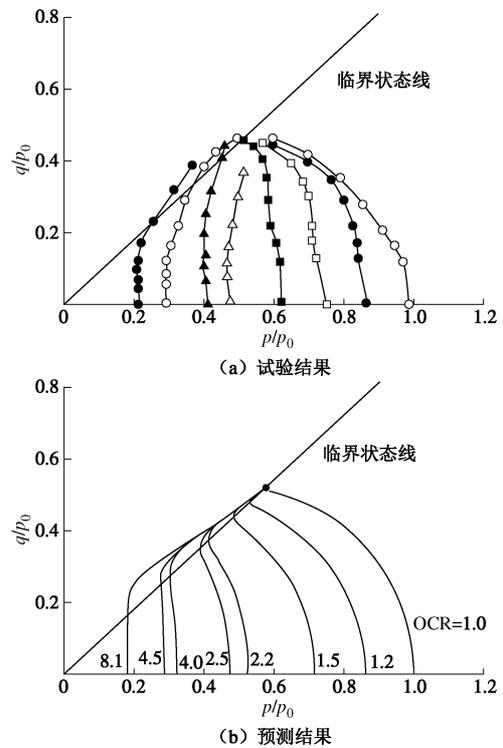


图 14 三轴不排水剪切试验应力路径 (数据来自文献[39])

Fig. 14 Stress paths of triaxial undrained compression tests

2 UH 模型的扩展

UH 模型是在超固结土 3 个基本特性的基础上, 通过引入统一硬化参数而建立的, 因此, 不同于直接拟合试验数据建立的本构模型, UH 模型具有牢固的基础。这种基础性决定了 UH 模型易于被改造和扩展。

工程中的土体不仅本身具有结构性、各向异性、小应变特性等复杂特性, 而且还受温度、时间、基质吸力等外部因素和循环荷载、部分排水 (即渐近状态) 等复杂加载路径的影响, 应力应变关系具有复杂性和多样性。为了考虑以上各种条件的影响, 对修正 UH 模型进行了多种扩展, 如图 15 所示。

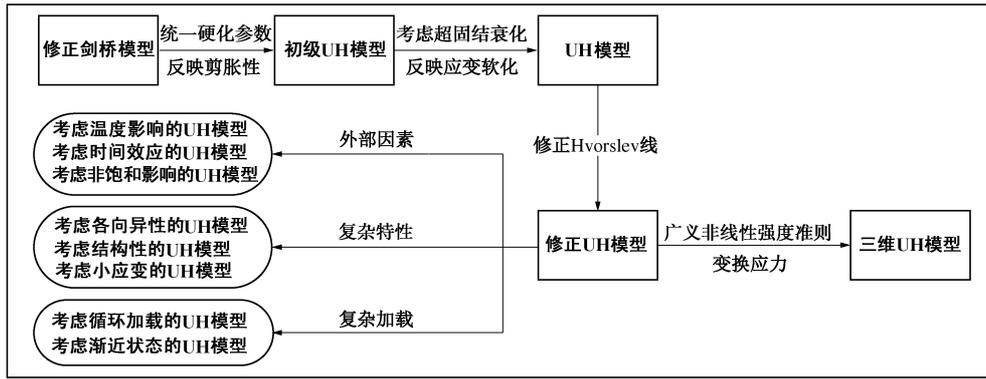


Fig. 15 Research framework of advanced UH models

2.1 考虑温度影响的 UH 模型

温度变化影响黏土的力学性质，在核废料深层地质处置、地热资源开发与贮存、地热结构设计等新型岩土工程中需要着重考虑。此外，地下高压电缆周围土体在长期高温作用下的承载力分析、熔炉基础在温度反复变化下的变形和稳定性分析、路面-土结构体系在季节性或日照温差反复作用下的变形和稳定性分析等工程问题中同样涉及温度的影响^[40]。

(1) 温度对饱和和黏土力学特性的影响

a) 温度对压缩特性的影响

图 16 是不同温度下饱和伊利土的正常压缩线和回弹线。随着温度的升高， $e - \lg p$ 平面内的正常压缩线和回弹线发生平移，但正常压缩线和回弹线的斜率基本上没有变化。

b) 温度对前期固结压力的影响

超固结土升温一再加载试验的结果表明超固结土的前期固结压力随升温减小，见图 17。Laloui 等^[41]使用如下公式来描述前期固结压力和温度的关系：

$$\left. \begin{aligned} p_{xT0} &= p_{x0} \xi_T \\ \xi_T &= 1 - \gamma \ln(T/T_0) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

式中， T 为当前温度， T_0 为参考温度，一般取常温。 p_{xT0} 为当前温度 T 下的前期固结压力， p_{x0} 为参考温度 T_0 下的前期固结压力。 ξ_T 为升温后与升温前的前期固结压力之比。 γ 为材料常数。

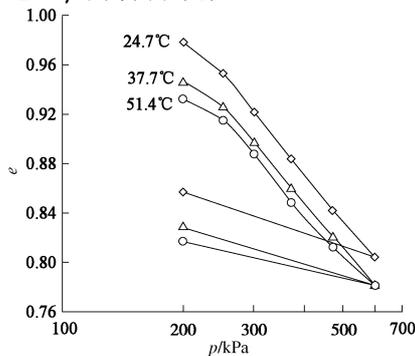


图 16 不同温度下的正常压缩线和回弹线 (数据来自文献[42])
Fig. 16 Normal compression and rebounding curves at different temperature

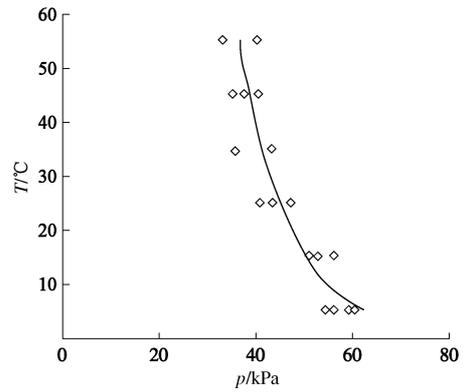


图 17 温度与前期固结压力的关系 (数据来自文献[43])
Fig. 17 Relation between temperature and preconsolidation pressure

c) 温度对抗剪强度的影响

图 18 是图 16 试验结果的示意图。图 18 中，土初始处于常温正常固结状态，状态点为 A 。随后温度升高，土发生体缩，沿路径 AB 到达点 B 。点 B 密度大于点 A ，因此强度较高。这说明升温提高了土的强度。假设点 B 的临界状态应力比为 M_{TB} 。从点 A 至点 B 除了升温路径 AB 外，还可以通过常温加载—卸载路径 ACB 。经过路径 ACB 后，土变为超固结，强度用 M_{TB} 表示，使用式 (33) 计算。

不论是经过路径 AB 还是 ACB ，土最终均到达点 B ，两个路径所得到的土的最终密度相同，因此，两个路径使土提高的强度理应相同，即 $M_{TB} = M_{TB}$ 。结合式 (33) 并考虑到点 B 是任意一点，则可得升温后土的临界状态应力比：

$$\left. \begin{aligned} M_T &= 6 \left[\sqrt{\frac{\chi}{\xi_T} \left(1 + \frac{\chi}{\xi_T} \right)} - \frac{\chi}{\xi_T} \right] \\ \chi &= \frac{M^2}{12(3-M)} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

如果在升温 (图 18 中路径 AB) 后，保持温度不变，对土进行加载—卸载 (路径 BED)，土在温度 T 时进入超固结状态 (点 D)，其潜在强度为

$$\left. \begin{aligned} M_{IT} &= 6 \left[\sqrt{\frac{\chi_T}{R_T} \left(1 + \frac{\chi_T}{R_T} \right)} - \frac{\chi_T}{R_T} \right], \\ \chi_T &= \frac{M_T^2}{12(3 - M_T)} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

式中, R_T 为温度 T 时土的超固结参数。

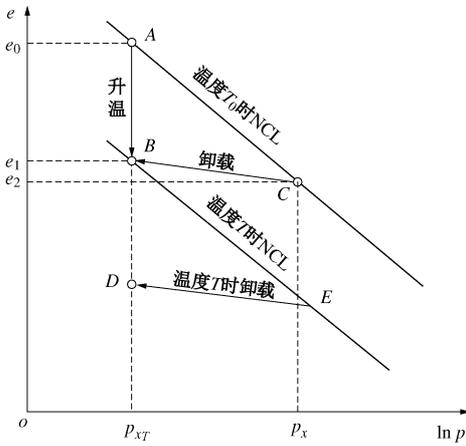


图 18 M_T 推导示意图

Fig. 18 Schematic diagram of derivation for M_T

(2) 温度影响下的屈服函数

笔者等^[44-45]根据温度对前期固结压力和强度影响的规律, 将温度引入修正 UH 模型的屈服面方程, 建立如下的当前和参考屈服面函数:

当前屈服面函数

$$f = \ln \frac{p}{p_{x0}} + \ln \left(1 + \frac{q^2}{M_T^2 p^2} \right) - \ln \xi_T - H_T = 0 \quad (39)$$

参考屈服面函数

$$\bar{f} = \ln \frac{\bar{p}}{\bar{p}_{x0}} + \ln \left(1 + \frac{\bar{q}^2}{M^2 \bar{p}^2} \right) - \ln \xi_T - \frac{1}{c_p} \varepsilon_v^p = 0 \quad (40)$$

式 (39) 中, H_T 是考虑了温度效应的统一硬化参数,

$$H_T = \frac{1}{c_p} \int \frac{M_{IT}^4 - \eta^4}{M_T^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p \quad (41)$$

超固结参数 R_T 是温度 T 时当前应力和参考应力的比值, 根据参考屈服面方程, 得到 R_T 的表达式:

$$R_T = \frac{p_{xT}}{\bar{p}_{xT}} = \frac{p}{\bar{p}_{x0} \xi_T} \left(1 + \frac{q^2}{M_T^2 p^2} \right) \exp \left(-\frac{\varepsilon_v^p}{c_p} \right) \quad (42)$$

根据式 (39)、(40), 在 $p-q-T$ 空间内绘制了如图 19 所示的三维屈服面。可以看出, 随着温度的升高, 当前和参考屈服面均缩小, 反映了温度对前期固结压力的影响。

(3) 热弹塑性本构方程

结合屈服面方程和相关联流动法则, 得到考虑温度影响的 UH 模型的热弹塑性本构方程:

$$\begin{Bmatrix} dp + B_1 dT \\ dq + B_2 dT \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K \cdot A_{1T} & 3KG \cdot A_{2T} \\ 3KG \cdot A_{2T} & 3G \cdot A_{3T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_v \\ d\varepsilon_d \end{Bmatrix} \quad (43)$$

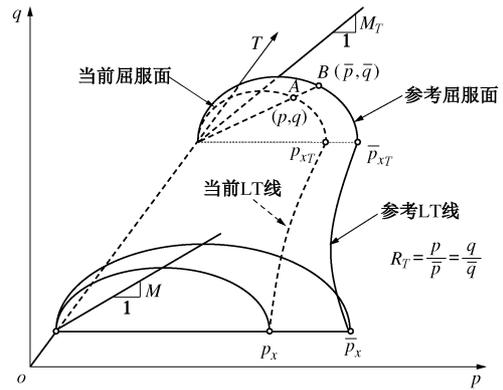


图 19 考虑温度影响的三维屈服面

Fig. 19 Three-dimensional yield surfaces considering temperature effect

式中 A_{1T} , A_{2T} , A_{3T} 与修正 UH 模型中的参数 A_1 , A_2 , A_3 (式 (35)) 具有相同的形式, 只是采用了温度影响下的强度参数 M_T 和 M_{IT} ,

$$\left. \begin{aligned} A_{1T} &= \frac{(M_{IT}^4 - \eta^4)p + 12Gc_p \eta^2}{(M_{IT}^4 - \eta^4)p + 12Gc_p \eta^2 + Kc_p(M_T^2 - \eta^2)^2}, \\ A_{2T} &= \frac{-2c_p(M_T^2 - \eta^2)\eta}{(M_{IT}^4 - \eta^4)p + 12Gc_p \eta^2 + Kc_p(M_T^2 - \eta^2)^2}, \\ A_{3T} &= \frac{(M_{IT}^4 - \eta^4)p + Kc_p(M_T^2 - \eta^2)^2}{(M_{IT}^4 - \eta^4)p + 12Gc_p \eta^2 + Kc_p(M_T^2 - \eta^2)^2}; \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

B_1 和 B_2 是与温度相关的参数, 对比修正 UH 模型的本构方程 (式 (34)) 和式 (43) 可以看出, 温度对应力应变关系的直接影响可以被视作引起了两个等效应力 $B_1 dT$ 和 $B_2 dT$ 。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{K(M_T^2 - \eta^2) \cdot c_p p}{M_T T \xi_T}, \\ &\frac{\gamma M_T (M_T^2 + \eta^2) - 2\alpha T \eta^2 \xi_T}{(M_{IT}^4 - \eta^4)p + 12Gc_p \eta^2 + Kc_p(M_T^2 - \eta^2)^2}, \\ B_2 &= \frac{6G\eta \cdot c_p p}{M_T T \xi_T}, \\ &\frac{\gamma M_T (M_T^2 + \eta^2) - 2\alpha T \eta^2 \xi_T}{(M_{IT}^4 - \eta^4)p + 12Gc_p \eta^2 + Kc_p(M_T^2 - \eta^2)^2}, \\ \alpha &= \frac{3\gamma}{T} \cdot \frac{(\xi_T + 2\chi_0) \sqrt{\chi_0(\xi_T + \chi_0)} - 2\chi_0(\xi_T + \chi_0)}{\xi_T^2(\xi_T + \chi_0)}, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$(46)$$

(4) 模型预测

图 20 是考虑温度影响的 UH 模型对三轴排水剪切试验的预测及其与试验结果的对比。从中可以看出, 温度越高, 抗剪强度越高。图 21 是考虑温度影响的 UH 模型对三轴不排水升温试验的预测。试验中, 首先对土进行三轴剪切, 在到达某一剪应力水平后, 维持剪应力不变, 升高温度, 此时孔压增大, 平均有效

应力减小, 在温度升高至 92℃后, 土甚至发生了破坏。

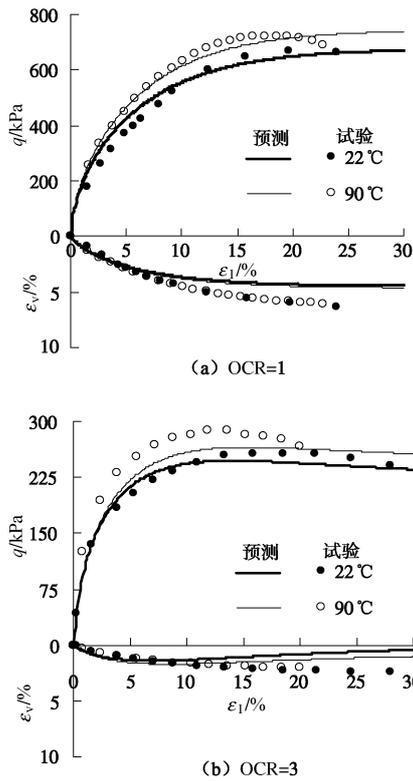


图 20 不同温度下的三轴排水剪切试验应力应变关系 (数据来自文献[46])

Fig. 20 Stress-strain curves of triaxial drained compression tests at different temperatures

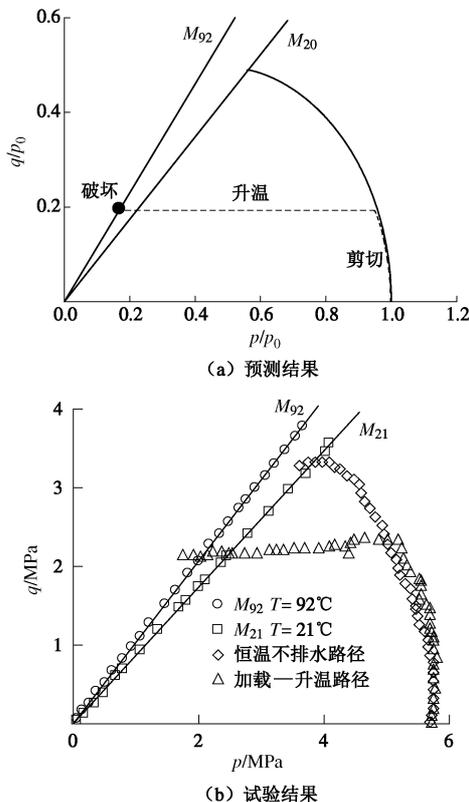


图 21 三轴不排水升温试验应力路径 (数据来自文献[46])

Fig. 21 Stress paths of triaxial undrained heating tests

2.2 考虑时间效应的 UH 模型

黏土的应力应变关系具有时间相关性, 这种特性被称作黏性或流变性。土的黏性主要表现为蠕变和应变率效应两种现象, 在工程中会引起地基不均匀沉降、边坡长期强度降低等问题。因此, 时间对土应力应变关系的影响一直是岩土工程领域中的研究热点。

(1) 蠕变对饱和黏土力学特性的影响

图 22 是不同蠕变时间的等向压缩曲线的概念图。不同蠕变时间的压缩曲线相互平行。而且, 蠕变时间越长, 压缩线位置越靠下^[47-48]。其中, 假定处于最上方的压缩曲线对应的蠕变时间为零, 是一条瞬时正常压缩线 (INCL)。假设土初始位于 INCL 上的点 A, 经过蠕变后到达点 B。蠕变过程 AB 可采用对数公式描述:

$$\Delta e = -\beta \ln\left(\frac{t}{t_0} + 1\right) \quad (47)$$

式中, t 为蠕变时间, t_0 可取与 t 量纲相同的单位时间, β 为 $e - \ln(t/t_0 + 1)$ 平面内蠕变曲线的斜率。

蠕变路径 AB 和应力加载—卸载路径 ACB 的孔隙比变化相等, 利用该关系, 可得蠕变时间与超固结参数的关系:

$$\frac{t + t_0}{t_0} = R^{-(\lambda - \kappa)/\beta} \quad (48)$$

由式 (48) 可知, 时间越长, 相当于土的超固结程度越大。因此, 时间对土的影响相当于加深了土的超固结程度。通过式 (48) 可以把时间问题可转换为土的超固结问题。

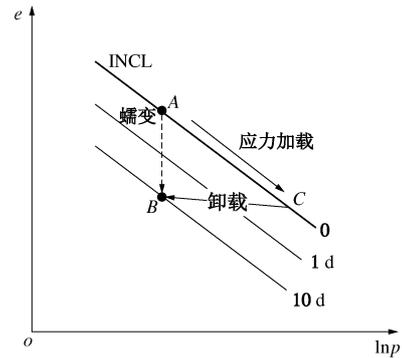


图 22 不同蠕变时间的等向压缩曲线

Fig. 22 Isotropic compression curves with different creep time

在式 (48) 的基础上, 笔者等^[49-50]推导了时间影响下的屈服应力 p_{x0} 与时间的关系:

$$\left. \begin{aligned} p_{x0} &= p_{x0} \exp(-\bar{t}), \\ \bar{t} &= \frac{\beta}{\lambda - \kappa} \int \frac{M_f^4 R^{(\lambda - \kappa)/\beta}}{M^4 t_0} dt \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

(2) 基本方程

将 \bar{t} 引入修正 UH 模型的当前屈服函数, 得到时

间影响下的当前屈服函数:

$$f = \ln \frac{p}{p_{x0}} + \ln \left(1 + \frac{\eta^2}{M^2} \right) + \bar{t} - H_t = 0 \quad (50)$$

式中,

$$H_t = \frac{1}{c_p} \int \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p \quad (51)$$

由于土的正常固结状态不受时间影响, 因此考虑时间效应的 UH 模型的参考屈服面函数与修正 UH 模型的参考屈服面函数(式(30))相同。

根据当前和参考屈服函数, 绘制了 $p-q-\bar{t}$ 空间内的时间影响下的三维屈服面, 如图 23 所示。随着 \bar{t} 的增加, 当前屈服面和参考屈服面间的距离增大, 体现了时间使土超固结程度加重的规律。

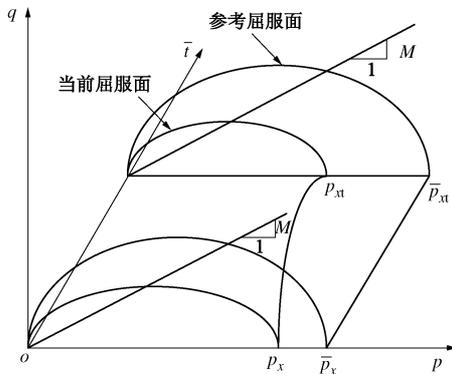


图 23 考虑时间效应的三维屈服面

Fig. 23 Three-dimensional yield surfaces considering time effect

(3) 黏弹塑性本构方程

根据屈服面方程和相关联流动法则, 得到考虑时间效应的 UH 模型的黏弹塑性本构方程:

$$\begin{bmatrix} dp + C_1 dt \\ dq + C_2 dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \cdot A_1 & 3KG \cdot A_2 \\ 3KG \cdot A_2 & 3G \cdot A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_v \\ d\varepsilon_d \end{bmatrix} \quad (52)$$

式中, A_1, A_2, A_3 与修正 UH 模型弹性刚度矩阵中的 A_1, A_2, A_3 (式(35)) 完全一致。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{pc_p \omega K (M^4 - \eta^4)}{(M_f^4 - \eta^4)p + 12Gc_p \eta^2 + Kc_p (M^2 - \eta^2)^2} \\ C_2 &= \frac{6qc_p \omega G (M^2 + \eta^2)}{(M_f^4 - \eta^4)p + 12Gc_p \eta^2 + Kc_p (M^2 - \eta^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

其中,

$$\omega = \frac{\beta}{\lambda - \kappa} \frac{M_f^4 R^a}{M^4 t_0} \quad (54)$$

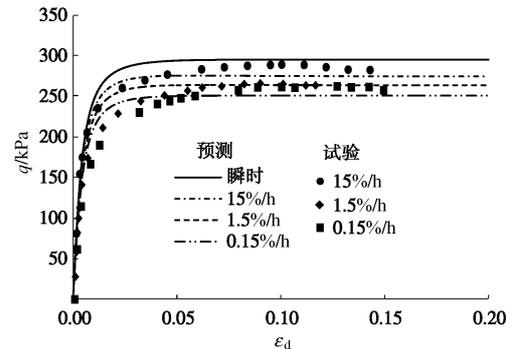
对比式(34)和式(52)可以看出, 时间对土应力应变关系的直接影响相当于对土施加了等效应力 $C_1 dt$ 和 $C_2 dt$ 。当时间增量 dt 为零时, 考虑时间效应的 UH 模型将退化为修正 UH 模型。

将式(52)中的应力和应变增量同除以时间增量, 可以得到应力率和应变率的关系:

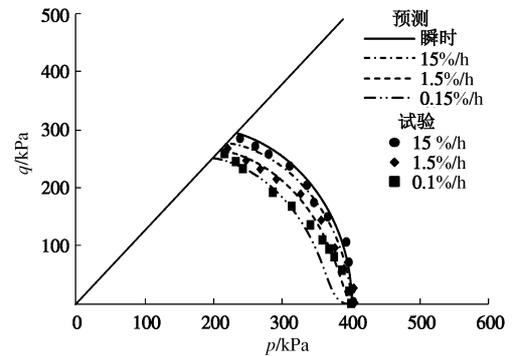
$$\begin{bmatrix} \dot{p} + C_1 \\ \dot{q} + C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \cdot A_1 & 3KG \cdot A_2 \\ 3KG \cdot A_2 & 3G \cdot A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_v \\ \dot{\varepsilon}_d \end{bmatrix} \quad (55)$$

(4) 模型预测

使用考虑时间效应的 UH 模型预测土的等轴向应变率三轴不排水剪切试验, 结果如图 24 所示。可以看出, 应变率越大, 抗剪强度越高。图 25 是考虑时间效应的 UH 模型对三轴不排水剪切蠕变试验的预测。计算中, 首先对土三轴剪切, 在到达某一剪应力水平后, 令剪应力保持不变。随后, 土在时间的作用下发生蠕变变形, 孔压增大, 平均有效应力减小。在时间足够长的情况下, 土甚至发生破坏。



(a) 应力-应变关系



(b) 应力路径

图 24 不同应变率下的饱和土三轴不排水剪切试验结果和预测结果 (数据来自文献[51])

Fig. 24 Experimental and predicted results of triaxial undrained compression tests at different strain rates

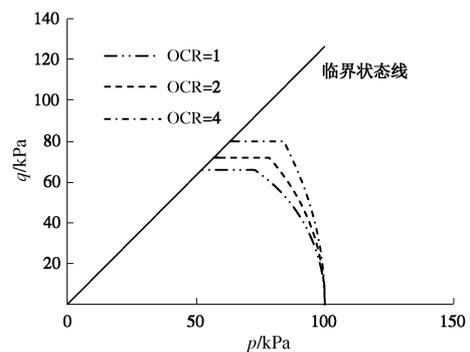


图 25 三轴不排水剪切蠕变试验应力路径

Fig. 25 Stress paths of triaxial undrained shearing creep

2.3 考虑非饱和影响的 UH 模型

自然界中非饱和土的分布十分广泛，与工程密切联系的地球表层土大部分是非饱和的。超固结非饱和土更具有普遍性，研究超固结非饱和土的特性具有重要的工程意义和理论价值。

(1) 基质吸力对黏土力学特性的影响

a) 基质吸力对 NCL 斜率的影响

在基质吸力 s 的影响下，非饱和土 NCL 的斜率 λ_s 比饱和土 NCL 的斜率 λ 小，如图 26 所示。 λ_s 和 λ 满足以下试验关系：

$$\lambda_s = \lambda[(1-r)\exp(-\beta s) + r] \quad (56)$$

式中， r 和 β 为材料参数。

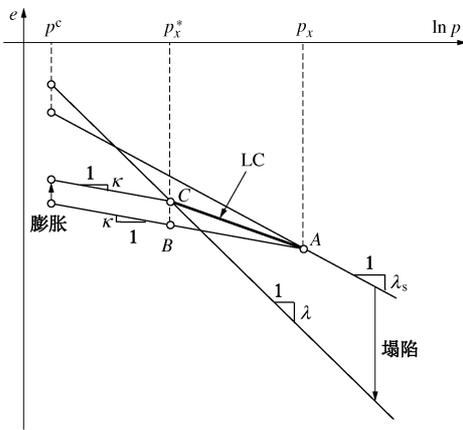


图 26 饱和土与非饱和土的等向压缩线

Fig. 26 Isotropic compression curves of saturated and unsaturated clays

b) 基质吸力对黏聚力的影响

土由饱和状态进入非饱和状态以后，基质吸力增加，土体产生黏聚力。黏聚力使用 p_s 表示：

$$p_s = ks \quad (57)$$

式中， k 为土性参数。

c) 基质吸力对前期固结压力的影响

Alonso 等^[52]提出了加载屈服线的概念，并用其描述基质吸力对前期固结压力的影响。根据加载屈服线，提出以下非饱和土前期固结压力公式：

$$\frac{p_{x0}}{p^c} = \left(\frac{p_{x0}^*}{p^c} \right)^{(\lambda-\kappa)/(\lambda_s-\kappa)} \quad (58)$$

式中， p_{x0} 为非饱和土的屈服应力， p_{x0}^* 为饱和土的屈服应力， p^c 为当基质吸力减小时不发生湿化的等向应力。

(2) 基本方程

考虑非饱和影响的 UH 模型^[53-55]中，统一硬化参数 H_s 表示为

$$H_s = \frac{1}{c_p} \int \frac{M_f^4 - \hat{\eta}^4}{M^4 - \hat{\eta}^4} d\varepsilon_v^p \quad (59)$$

式中， $\hat{\eta}$ 为考虑了黏聚力后的应力比，

$$\hat{\eta} = q/(p + p_s) \quad (60)$$

考虑非饱和影响的 UH 模型中，当前屈服面采用 H_s 作为硬化参数。当前屈服面的硬化定律为

$$p_x = p_{x0} \exp(H_s) \quad (61)$$

在当前屈服面中考虑黏聚力的影响，则当前屈服面方程为

$$f = q^2 - M^2(p + p_s)(p_x - p) = 0 \quad (62)$$

参考屈服面方程直接采用 Alonso 等^[52]提出的正常固结非饱和土模型的屈服面方程，

$$\bar{f} = \bar{q}^2 - M^2(\bar{p} + p_s)(\bar{p}_x - \bar{p}) = 0 \quad (63)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_x &= \bar{p}_{x0} \exp\left(\frac{\varepsilon_v^p}{c_p}\right), \\ \frac{\bar{p}_{x0}}{p^c} &= \left(\frac{\bar{p}_{x0}^*}{p^c}\right)^{(\lambda-\kappa)/(\lambda_s-\kappa)}. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

在基质吸力为 s 时，土的超固结参数 R_s 的表达式为

$$R_s = \frac{p_{xs} + p_s}{\bar{p}_{xs} + p_s} = \frac{(p + p_s) \left(1 + \frac{\hat{\eta}^2}{M^2}\right)}{\bar{p}_0 \exp\left(\frac{\lambda - \kappa}{\lambda_s - \kappa} \frac{\varepsilon_v^p}{c_p}\right) + p_s} \quad (65)$$

根据当前屈服面方程和参考屈服面方程，绘制了图 27 所示的 $p - q - s$ 空间的三维屈服面。

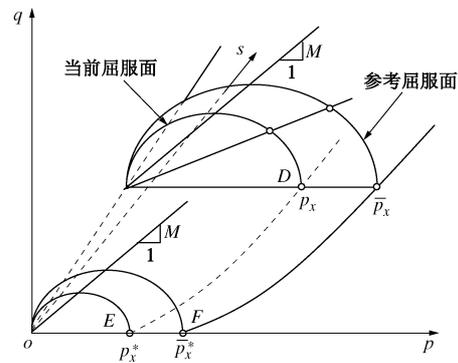


图 27 考虑基质吸力影响的三维屈服面

Fig. 27 Three-dimensional yield surface considering suction effect

(3) 模型预测

图 28 中数据点为不同超固结程度的非饱和土湿化试验的结果。重超固结土在湿化过程中发生体胀，如图中路径 EF 所示。而且，超固结度越小，土的湿化体胀变形越小。当土为轻微超固结或正常固结时，土的湿化变形为体缩变形，如图中路径 AB 所示。然而，在 Alonso 等^[52]提出的模型中，各种程度的重超固结土的湿化变形均相同，这不符合试验规律。而考虑非饱和的 UH 模型可以描述湿化变形随超固结度减

小由体胀变为体缩的连续过程，如图 28 所示。

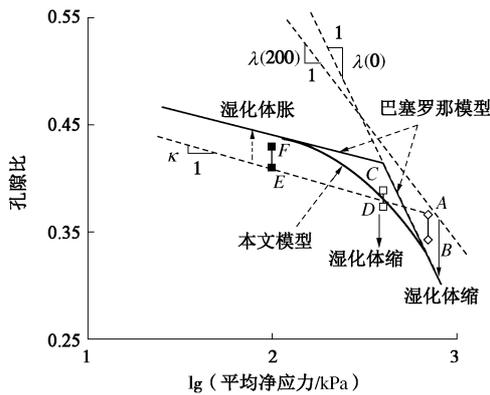


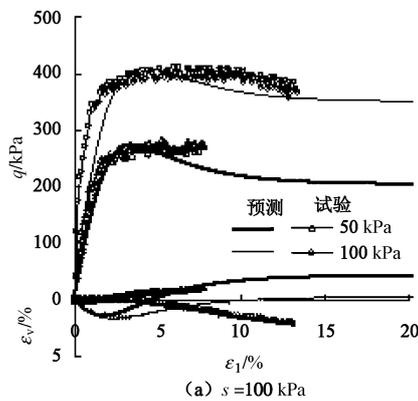
图 28 土的湿化变形 (数据来自文献[56])

Fig. 28 Wetting deformation of clay

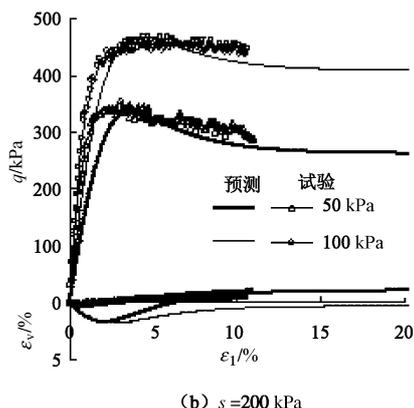
图 29 是超固结非饱和粉土三轴剪切的试验和预测结果。在试验中，试样的初始围压分别为 50, 100 kPa 两种情况。剪切过程中的基质吸力保持不变。为了取得较好的预测效果，预测采用了非关联流动法则。对比图 29 (a)、29 (b)、29 (c) 可以看出，基质吸力越大，土的峰值强度越高，而应变软化也就越明显。

2.4 考虑各向异性的 UH 模型

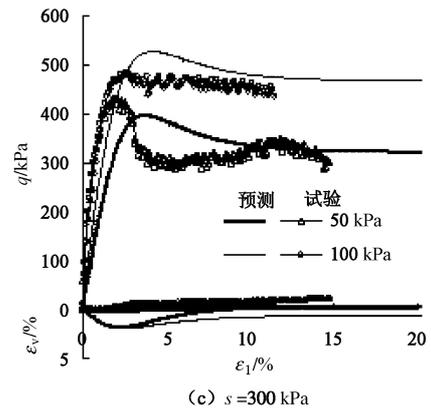
土在天然沉积过程中受重力影响，土颗粒倾向于沿水平方向优势排列，这使得土体在竖向和水平方向的强度、压缩模量等力学指标不同，产生各向异性。



(a) $s=100$ kPa



(b) $s=200$ kPa



(c) $s=300$ kPa

图 29 超固结非饱和粉土三轴剪切试验和预测结果 (数据来自文献[57])

Fig. 29 Experimental and predicted results of triaxial compression tests on overconsolidated unsaturated silty soils

建立考虑各向异性的本构模型，首先要找到描述各向异性的状态变量。目前较为常用的是组构张量。组构张量是在细观力学范畴定义的一个描述材料内在各向异性的状态变量。采用组构张量和应力张量联合不变量定义的各向异性状态变量 A ，在某些特殊情况下只考虑了大主应力面和沉积面的夹角 δ (图 30)， A 与 δ 呈单调关系。而试验表明土的平面应变强度与 δ 的关系是不单调的，如图 31 所示。关于 δ 的单调函数关系不能完全反映非单调的函数规律，而且很难确定强度最低点。图 32 中，潜在滑动面和沉积面的夹角 ζ 与平面应变强度的关系是单调的。如果基于 ζ 建立各向异性状态变量，则可以得到各向异性状态变量与平面应变强度的单调函数关系。

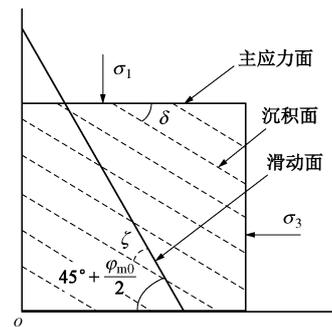


图 30 大主应力面、沉积面和滑动面之间的关系

Fig. 30 Relation among major principal stress plane, deposition plane and mobilized plane

笔者等^[59-61]假定，在三维条件下，潜在滑动面与沉积面的夹角与横观各向同性土的强度呈单调关系。潜在滑动面使用 Matsuoka 等^[62]的空间滑动面 (spatially mobilized plane, SMP 面) 描述。由于沉积面上土的强度最低，所以假定 SMP 面与沉积面重合时，土最容易发生破坏。

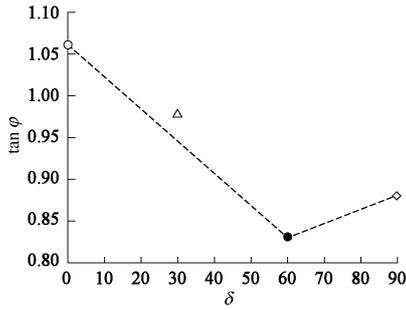


图 31 强度和 δ 的关系 (数据来自文献[58])

Fig. 31 Relation between $\tan \varphi$ of and δ

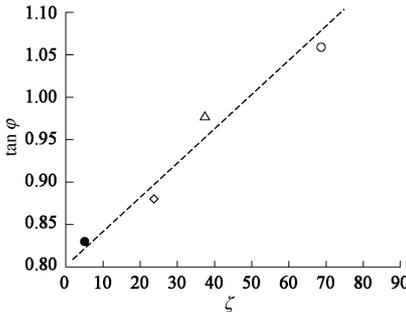


图 32 强度和 ζ 的关系 (数据来自文献[58])

Fig. 32 Relation between $\tan \varphi$ and ζ

如图 33 所示, 空间中存在多个 SMP 面, 取所有 SMP 面与沉积面的最小夹角 α 作为衡量强度的参量, 提出了如下的各向异性强度公式:

$$M_\alpha = M_h + (M_v - M_h) \frac{\alpha - \alpha_h}{\alpha_v - \alpha_h}, \quad (66)$$

式中, M_α 为各向异性土的破坏应力比,

$$\left. \begin{aligned} M_v &= \frac{6 \sin \varphi_v}{3 - \sin \varphi_v}, \\ M_h &= \frac{6 \sin \varphi_h}{3 - \sin \varphi_h}, \\ \alpha_v &= \cos^{-1} \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi_v}{3 + \sin \varphi_v}}, \\ \alpha_h &= \cos^{-1} \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi_h}{3 + \sin \varphi_h}} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

其中, φ_v 和 φ_h 分别为垂直土样和水平土样的内摩擦角, 可通过室内三轴试验测得。

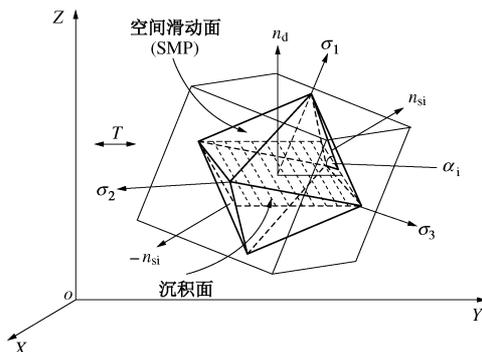


图 33 SMP 面和沉积面

Fig. 33 Spatially mobilized and depositional planes

笔者等^[59]使用变换应力的三维化方法, 将式 (66) 所示的各向异性强度参数与 UH 模型结合, 建立了考虑各向异性的 UH 模型。

图 34 给出了横观各向同性海滩淤泥在偏平面上的强度包线的试验与预测结果, 实线是式 (66) 所示的各向异性强度公式的计算结果, 虚线是各向同性强度准则 (SMP 准则) 的计算结果。对比发现, 各向异性强度公式与试验结果符合程度比各向同性强度准则好。用考虑各向异性的 UH 模型预测的各向异性土的应力应变关系也能较好地反映试验规律^[60]。

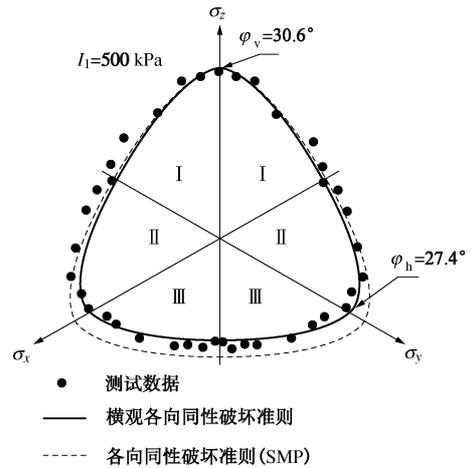


图 34 海滩淤泥土在偏平面上的强度包线 (数据来自文献[63])

Fig. 34 Strength envelopes in deviatoric plane of bay mud

2.5 考虑结构性的 UH 模型

天然土中存在广泛的微结构, 宏观上称其为结构性。一方面, 结构性使得天然土在相同的孔隙比下能够承受更大的应力, 另一方面结构性随加载产生破损衰化引发土体的更大变形。因此, 在岩土本构模型中考虑结构性非常必要, 许多学者进行了卓有成效的工作^[64-65]。

对具有相同初始孔隙比的结构土和重塑超固结土进行等向压缩试验, 得到如图 35 所示的压缩曲线。重塑超固结土的压缩曲线从下方逐渐趋近于 NCL。而结构性土的压缩曲线先越过 NCL, 到达 NCL 的上方, 然后从上方趋近 NCL。为了描述结构性土再加载线的这种衰减特性, 笔者等^[66]提出了一个移动正常压缩线 (MNCL), 如图 35 所示。将 MNCL 上的点作为计算结构性土超固结度的参考点, 建立了能够反映结构性衰减的 UH 模型。MNCL 方程及其演化公式为

$$\left. \begin{aligned} e &= N - \lambda \ln p + \Delta e, \\ d(\Delta e) &= -\zeta \cdot R \cdot \Delta e \cdot d(\ln p), \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

式中, Δe 为结构势, R 表明了当前应力点应力与 MNCL 上的参考点应力之间的比值。系数 ζ 用于调节结构势 Δe 的整体衰减率。

笔者等^[66]认为结构性衰化只引发体积应变。通过将结构性衰化引起的体积应变（式（68））引入UH模型，提出了考虑结构性的UH模型。

图36展示了人工制备结构性土和相应的重塑土在经历等向压缩加载中的试验结果和模型预测结果。模型能够较好地反映结构性土在加载初期的高承载力和加载后期的结构性衰减。用考虑结构性的UH模型预测的结构性土的应力应变关系也能较好地反映试验规律。

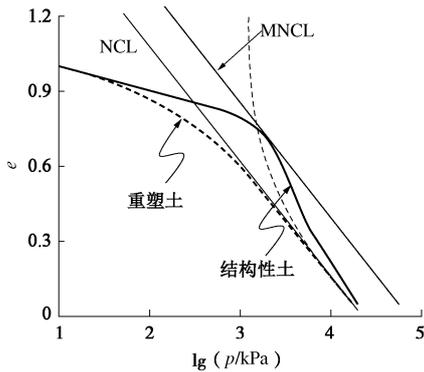


图35 结构性土与重塑超固结土的等向压缩曲线

Fig. 35 Isotropic compression curves of structured and remolded overconsolidated clays

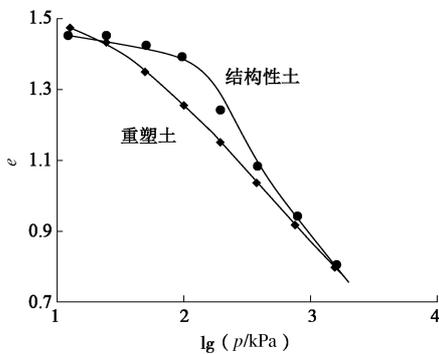


图36 人工制备结构性土与重塑土的等向压缩曲线

Fig. 36 Isotropic compression curves of artificially structured and remolded clays

2.6 考虑小应变特性的UH模型

现场试验数据表明土在小应变（0.0001%~0.1%）区间内刚度发生非线性衰减，如图37所示。在深基坑和隧道开挖等工程中，如不考虑土在小应变区间的刚度衰减特性，则不能合理描述工程开挖对周边环境的影响^[67]。

笔者等使用滞回圈来描述等向应力条件下的弹性加卸载应力应变关系，并将该关系推广到三轴应力状态，建立了土在等向应力和三轴应力条件下的刚度衰减公式。将该刚度衰减公式引入修正UH模型，建立

了考虑小应变特性的UH模型。使用考虑小应变特性的UH模型预测超固结土的三轴剪切试验，并将预测结果与试验结果比较，如图38所示。可以看出对小应变条件下的应力应变关系的预测更加合理（与图13相比较）。

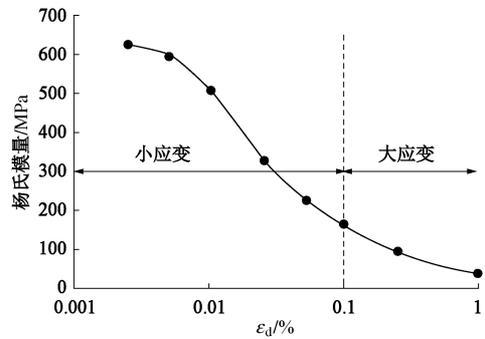


图37 小应变区域内的刚度衰减

Fig. 37 Stiffness reduction in small-strain range

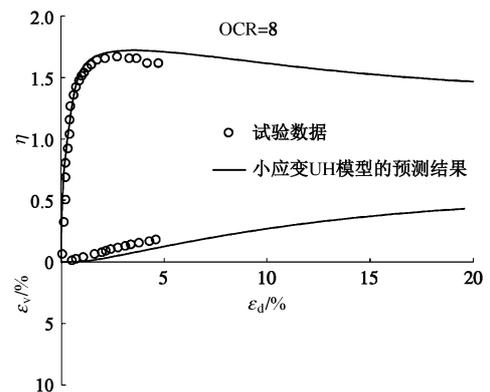


图38 小应变UH模型预测的三轴剪切试验应力应变曲线（数据来自文献[34]）

Fig. 38 Predicted stress-strain curves of triaxial compression test by small-strain UH model

2.7 考虑循环加载的UH模型

为了描述循环加载条件下砂土的复杂应力应变关系，笔者等^[68]将修正UH模型扩展为可以考虑循环加载的本构模型。主要进行了以下3个方面发展：①将形状固定的椭圆屈服面改变为可变屈服面，椭圆的形状由β'来刻画。β'本身是椭圆旋转轴的斜率；②引入旋转硬化规则，使椭圆屈服面可围绕原点旋转从而反映反向加载条件下的本构效应；③修正统一硬化参数，使其能够协调旋转硬化、等向硬化以及临界状态。

使用考虑循环加载的UH模型预测松砂的三轴压缩和拉伸排水剪切试验，结果如图39所示。模型能够模拟试验中观测到的循环加载滞回圈特性。

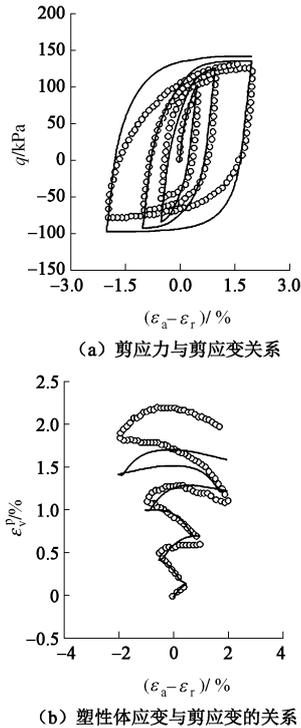


图 39 松砂三轴压缩和拉伸排水剪切试验和预测结果 (数据来自文献[69])

Fig. 39 Experimental and predicted results of triaxial drained compression and extension test on loose sand

2.8 考虑渐近状态特性的 UH 模型

天然地基中的土通常是在某种约束下受力而发生变形的, 完全排水条件下受力后的自由变形和完全不排水条件下的受力变形是两种极端的情况。部分排水 (吸水) 条件下, 也即某种变形约束下的受力变形才是普遍的。实践表明, 土材料的这种变形约束会影响到土的应力应变关系, 在变形约束下的剪切受力极限应力比有时会比峰值破坏应力比低很多。这种现象可用渐近状态解释。如图 40 所示, 不同排水条件加载所得的极限应力比基本处于同一直线上, 该直线称为渐近状态线。Chu 等^[70]使用下式来描述渐近状态线:

$$\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} = \frac{3(M_0 - \eta)}{M_0}, \quad (69)$$

式中, $d\varepsilon_v/d\varepsilon_1$ 为三轴压缩条件下体积应变增量与轴向应变增量之比。 M_0 为 $d\varepsilon_v/d\varepsilon_1$ 等于 0 时的极限应力比, 也即不排水条件下的极限应力比。

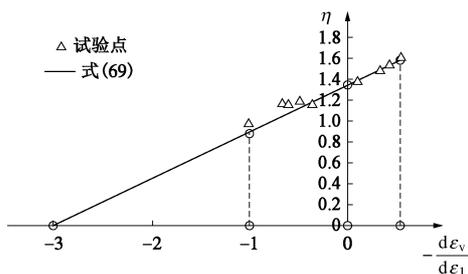


图 40 渐近状态试验数据 (数据来自文献[70])
Fig. 40 Test data of asymptotic states

在 UH 模型中, 剪切和压缩是相互耦合的, 其耦合关系即剪胀方程, 如式 (2) 所示。通过剪胀方程耦合剪切和压缩在简单路径 (如完全排水条件下的常规三轴压缩和三轴等 p 压缩路径) 下, 还是比较合理的。但在复杂应力路径 (如控制不同的体积应变或排水条件) 下, 剪胀关系和应力路径有很大关系。为了考虑复杂应力路径对应力应变关系的影响, 笔者等^[71-74]假定只有部分塑性体积应变与塑性剪应变有耦合作用, 其余的塑性体积应变则不参与耦合作用。硬化参数 H 也分为耦合硬化参数 H^c 和非耦合硬化参数 H^{unc} 两部分:

$$H_A = H^c + H^{unc}, \quad (70)$$

$$H^c = \frac{1}{c_p} \int \frac{M_r^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^{pc}, \quad (71)$$

$$H^{unc} = \int d\varepsilon_v^{punc} = \int \mu c_p \frac{1}{p} dp, \quad (72)$$

式中, μ 为耦合参量, $0 \leq \mu \leq 1$ 。对于黏土, $\mu = 1 - \lambda M / [3(\lambda - \kappa)]$ 。

根据 UH 模型的剪胀方程 (式 (2)) 和 H_A , 推得新的剪胀关系:

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_1^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} + \frac{\mu c_p}{d\varepsilon_1^p} \frac{dp}{p}, \quad (73)$$

式中, 等号右侧第一项为耦合硬化的剪胀方程, 与应力路径无关。但是, 第二项中存在塑性剪应变增量与应力增量, 这使得剪胀关系总体上与应力路径相关。

基于 H_A 和新的剪胀关系, 建立了考虑渐近状态特性的 UH 模型。使用该模型预测不同排水条件下的三轴压缩试验, 预测的应力路径和试验结果的对比如图 41 所示。发现考虑渐近状态特性的 UH 模型能够反映不同应力路径极限应力比不同的性质。

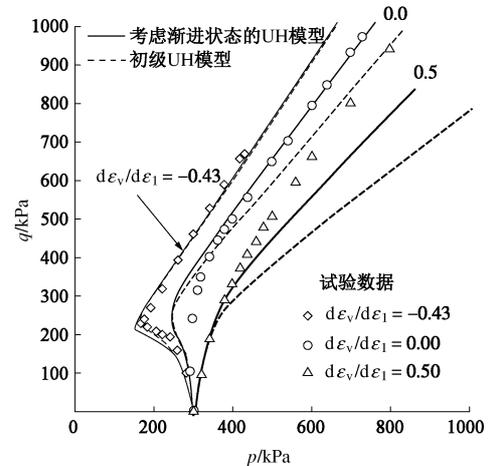


图 41 不同排水条件下的三轴剪切试验和预测结果 (数据来自文献[70])

Fig. 41 Measured and predicted results of triaxial compression tests under different drained conditions

不仅如此，根据考虑渐近状态特性的 UH 模型的本构公式，还推得了不排水条件下极限应力比 M_0 与特征状态应力比 M 和破坏应力比 M_f 之间的关系，

$$M_0 = \frac{6M_f - M_f^2 + M^2}{6} \quad (74)$$

式 (74) 可作为由排水试验的试验参数 M 和 M_f 推求不排水抗剪强度参数 M_0 的简单方法。

3 UH 模型的三维化

土是一种应力诱导各向异性材料，土的强度包线在偏平面上非圆。前述的 UH 模型系列在未特殊说明的情况下隐含采用了广义 Mises 强度准则，不能反映应力诱导各向异性。因此，需将本构模型与能够反映应力诱导各向异性的强度准则结合，这一过程被称为本构模型的三维化。

3.1 广义非线性强度准则

笔者等^[75]基于摩擦材料的试验规律，提出了广义非线性强度准则。广义非线性强度准则在偏平面上的强度包线介于广义 Mises 准则和 SMP 准则之间，反映了材料的中主应力效应；子午面上的破坏函数为幂函数，反映了材料的静水压力效应。笔者等还提出了一个过渡空间，在该空间内，偏平面上的非线性函数可以和子午面上的非线性函数方便结合，从而使得广义非线性强度准则可以用一个表达式统一地描述材料在偏平面及子午面上的非线性强度特性。广义非线性强度准则的数学表述为

$$\alpha\sqrt{\bar{I}_1^2 - 3\bar{I}_2} + \frac{2(1-\alpha)\bar{I}_1}{3\sqrt{(\bar{I}_1\bar{I}_2 - \bar{I}_3)/(\bar{I}_1\bar{I}_2 - 9\bar{I}_3)} - 1} = M_f\bar{p} \quad (75)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \left[p_r \left(\frac{p + \sigma_0}{p_r} \right)^n - p \right] \delta_{ij} \quad (76)$$

式中， \bar{I}_1 、 \bar{I}_2 和 \bar{I}_3 分别为过渡应力空间的第一、二和三应力不变量， \bar{p} 为过渡应力空间的平均应力， $\bar{\sigma}_{ij}$ 为过渡应力，可用真实应力 σ_{ij} 求出。 p_r 为参考应力， σ_0 为三向拉伸强度， M_f 为参考应力 p_r 作用下的破坏应力比，如图 42 所示。 n 为静水压力效应指数。参数 α 是反映偏平面上三轴拉压强度比的参数。

将广义非线性强度准则既作为强度准则又作为屈服准则，其偏平面上的屈服线和破坏包线形状如图 43 所示。在同一偏平面上，当偏应力较低时，材料的屈服线表现为低应力诱导各向异性，屈服线接近于圆；偏应力较高时，材料的屈服线表现为高应力诱导各向异性，屈服线相应的由圆过渡为曲边三角形。

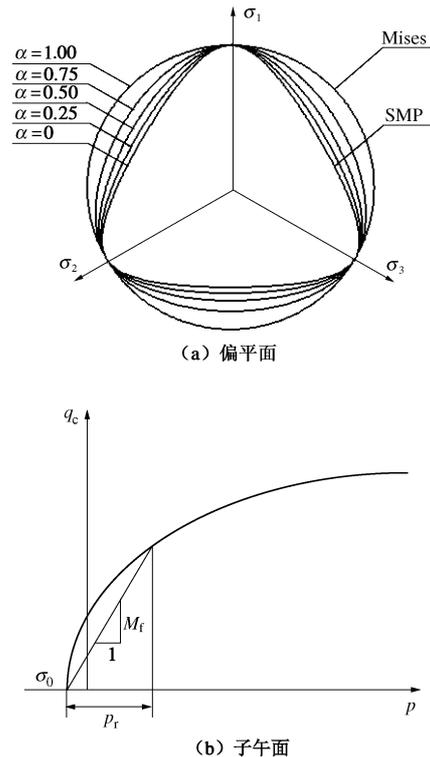


图 42 广义非线性强度准则破坏包线

Fig. 42 Failure envelopes of generalized non-linear strength criterion

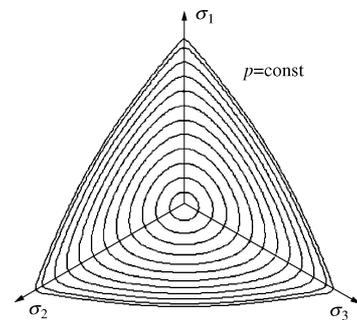


图 43 广义非线性屈服线和破坏包线

Fig. 43 Generalized non-linear yield curves and failure envelope

广义非线性强度准则在偏平面上涵盖了从下限 SMP 准则到上限 Mises 准则内的区域，具有一定的普遍性。

3.2 变换应力的三维化方法

为了实现 MCC 模型、UH 模型系列与广义非线性强度准则等的结合，笔者等^[76-79]提出了变换应力的三维化方法。变换应力是根据数学映射的思想推导的。如图 44 所示，在真实应力 σ_i 空间，强度包线（实线）是非圆的曲三角形。假设一个变换应力 $\tilde{\sigma}_i$ 空间，在该空间内，强度包线为圆（虚线）。从真实应力 σ_i 空间到变换应力 $\tilde{\sigma}_i$ 空间的映射实际上是从点 $A(p, q, \theta)$ 到点 $B(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\theta})$ 的映射。两者的映射关系为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p} &= p, \\ \tilde{q} &= q_c, \\ \tilde{\theta} &= \theta, \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

式中, q_c 为三轴压缩路径的强度, 不同的强度准则中 q_c 的公式不同. SMP 准则的 q_c 为

$$q_c = \frac{2I_1}{3\sqrt{(I_1I_2 - I_3)/(I_1I_2 - 9I_3)} - 1}; \quad (78)$$

Lade 准则的 q_c 为

$$q_c = I_1 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27I_3}{I_1^3}} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(-\sqrt{\frac{27I_3}{I_1^3}} \right) \right) \right]^{-1} \right\}; \quad (79)$$

广义非线性强度准则的 q_c 为

$$q_c = \alpha \sqrt{I_1^2 - 3I_2} + \frac{2(1-\alpha)I_1}{3\sqrt{I_1I_2 - I_3}/(I_1I_2 - 9I_3) - 1}. \quad (80)$$

根据式 (77) 所示的映射关系, 可推得变换应力和真实应力的关系:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \begin{cases} p\delta_{ij} + \frac{q_c}{q}(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) & (q \neq 0) \\ \sigma_{ij} & (q = 0) \end{cases}. \quad (81)$$

将 MCC 模型或 UH 模型系列中屈服面方程和其它方程的真实应力全都直接替换为式 (81) 所示的变换应力, 即可方便地实现模型的三维化. 变换应力的三维化方法克服了已有的三维化方法的一系列问题^[80-81]: ①克服了 $g(\theta)$ 方法在 p 轴处 $g(\theta)$ 值不连续的问题; ②克服了 $g(\theta)$ 方法三维化 K_0 各向异性本构模型导致屈服面不连续和内凹的问题.

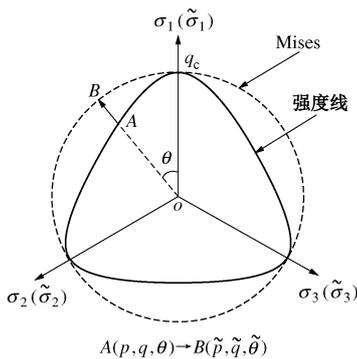


图 44 真实应力和变换应力偏平面

Fig. 44 Deviatoric planes of real and transformed stresses

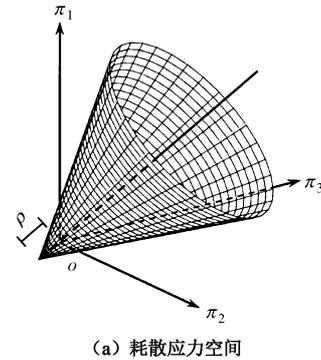
3.3 变换应力的热力学基础

最近 20 多年, 热力学理论逐渐被广泛接受并用于描述和解释固体材料的力学特性. Collins 等^[82]基于热力学基本定律, 提出了耗散应力空间, 并依此建立了满足热力学定律的本构模型, 但他建立的模型还不能反映应力诱导各向异性的影响.

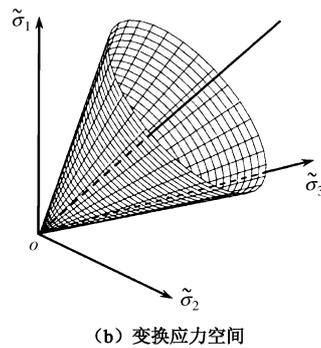
笔者等^[83]为了研究应力诱导各向异性的影响, 在 Collins 耗散应力空间的屈服函数中引入与塑性体应变相应的迁移应力 ρ 和与塑性剪应变相对应的迁移应力 ζ ($\zeta = q - q_c$). ζ 中含有真实应力项, 从而能够反映屈服面形状的应力依存性, 也即能够反映应力诱导各向异性. 耗散应力 π_{ij} 和真实应力具有如下转换关系:

$$\pi_{ij} = (p - \rho)\delta_{ij} + \frac{q_c}{q}(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}). \quad (82)$$

对比式 (81)、(82), 可以看出变换应力和耗散应力非常相似, 变换应力相当于没有考虑 ρ 的耗散应力. 图 45 显示了耗散应力空间和变换应力空间的屈服面. 对比可以发现, 变换应力空间的屈服面相当于是通过耗散应力空间屈服面的沿 p 轴平移得到的. 而这种沿 p 轴的平移并没有改变屈服面的形状, 不会影响屈服规律和流动法则, 变换应力方法满足热力学定律.



(a) 耗散应力空间



(b) 变换应力空间

图 45 三维应力空间的屈服面

Fig. 45 Yield surfaces in three-dimensional stress spaces

4 UH 模型的数值实现和应用

为了实现 UH 模型及其相关模型系列在岩土工程中的应用, 笔者等^[84-88]已成功将 UH 模型通过用户子程序嵌入到相关有限元软件中.

在 UH 模型嵌入相关有限元软件的过程中, 涉及到有限元平衡迭代和应力更新等方面, 均采用成熟算法实现. 但是, 值得注意的是, UH 模型实现三维化

采用了变换应力的三维化方法,而变换应力的三维化方法采用与耗散应力空间类似的非关联流动法则。因此,使用变换应力的方法对UH模型进行三维化,导致三维UH模型的切线刚度矩阵非对称。将三维UH模型与有限元结合时,非对称的切线刚度矩阵在特殊情况下会导致不收敛问题。所以,三维UH模型嵌入到有限元软件的一个核心问题便是解决切线刚度矩阵的非对称问题。

三维UH模型的塑性标量因子为

$$\Lambda = \frac{(\partial f / \partial \sigma)^T D_e d\epsilon}{X}, \quad (83)$$

式中, $\partial f / \partial \sigma$ 为屈服函数对真实应力的偏导, D_e 为弹性刚度矩阵, $d\epsilon$ 为应变增量,

$$X = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D_e \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{(\tilde{M}_r^4 - \tilde{\eta}^4)}{(M^4 - \eta^4)} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mm}}。 \quad (84)$$

在式(83)、(84)的基础上,可推得弹塑性刚度矩阵:

$$D_{ep} = D_e - D_e \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D_e / X, \quad (85)$$

式中, $\partial f / \partial \tilde{\sigma}$ 为塑性势函数对变换应力的偏导。由于 $\partial f / \partial \tilde{\sigma}$ 与 $\partial f / \partial \sigma$ 不同,所以式(85)所示的切线刚度矩阵非对称。

基于熊文林^[89]所提方法推导了由变换应力引起的非关联流动条件下切线刚度矩阵的对称化因子:

$$r = \frac{(\partial f / \partial \tilde{\sigma})^T D_e d\epsilon}{(\partial f / \partial \sigma)^T D_e d\epsilon}, \quad (86)$$

式中, r 为一个标量。

在式(83)的分子分母上同乘标量 r , 可得一个新的标量因子公式:

$$\Lambda = \frac{r(\partial f / \partial \sigma)^T D_e d\epsilon}{rX} = \frac{(\partial f / \partial \tilde{\sigma})^T D_e d\epsilon}{X'}, \quad (87)$$

式中,

$$X' = rX = \frac{(\partial f / \partial \tilde{\sigma})^T D_e d\epsilon}{(\partial f / \partial \sigma)^T D_e d\epsilon} X。 \quad (88)$$

由于 r 是一个标量,所以式(83)、(87)是等价的。根据式(85)~(88)可得到一个新的弹塑性刚度矩阵公式:

$$D_{ep} = D_e - D_e \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \right)^T D_e / X'。 \quad (89)$$

该式所显示的切线刚度矩阵是对称的。使用对称化切线刚度矩阵表示的应力应变关系与用非对称切线刚度矩阵表示的应力应变关系是等价的。

笔者等^[85-88]采用此方法实现了三维UH模型切线刚度矩阵的对称化,使得有限元计算的收敛性和收敛速度明显提高。例如,图46是使用UH模型预测的圆

形地基 $p-s$ 曲线。在对称化之前,当采用应力加载的方法计算时,当应力计算到 180 kPa 时,出现不收敛,计算无法继续;但采取对称化方法之后,可以预测 $p-s$ 曲线至峰值点。

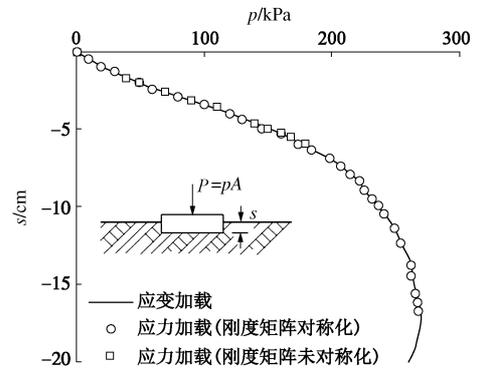


图 46 圆形地基 $p-s$ 曲线

Fig. 46 $p-s$ curves of circular footing

5 结 论

(1) 基于超固结土的摩擦性、剪胀性和压硬性,提出了能够统一描述超固结土剪缩和剪胀的统一硬化(UH)参数。以UH参数为基础,建立了初级UH模型。随后,通过引入超固结度的衰化规律,建立了UH模型及修正UH模型。硬化参数是本构模型的3个基本要素(屈服函数、塑性势函数和硬化参数)之一。从土的硬化规律入手,根据土的基本特性建立的UH模型,相较于直接进行塑性模量插值得到的本构模型,适用范围更广,也更易于扩展。

(2) 将时间、温度和基质吸力等因素作为自变量引入UH模型的屈服函数,方便地建立了能够考虑温度效应、蠕变和应变率效应、以及非饱和影响的UH模型,充分体现了UH模型的基础性。

(3) 在各向异性、结构性、小应变特性等复杂特性,和循环加载、排水条件(即渐进状态)等复杂加载条件的影响下,土表现出特殊的试验规律。将这些试验规律抽象为数学变量或数学表达式,并与UH模型结合,建立了考虑各种复杂特性和复杂加载条件的扩展UH模型。

(4) 提出了广义非线性强度准则,该准则可适用于不同种类的岩土材料。提出了变换应力的三维化方法,该方法克服了已有常用三维化方法的诸多问题,并且符合热力学定律。结合广义非线性强度准则和变换应力方法,实现了UH模型系列的三维化。

(5) 在解决了三维UH模型切线刚度矩阵对称化问题之后,成功地将UH模型嵌入到相关有限元软件中,并使用基于UH模型的软件分析了多个岩土工程问题。

尽管笔者等在本构模型的研究上取得了一些进展,但是,由于认识水平和知识结构的局限性,还需要更深入细致的工作去完善和发展现有的研究成果。例如,包括颗粒破碎^[90]在内的土的很多复杂特性都与结构性密切相关,因此还需要深入探索结构性对土的应力-应变关系的影响,进而建立能用于工程实际的土的结构本构模型。此外,在本构模型的工程应用中,如何合理选取模型参数也是非常重要的。目前常用的参数确定方法是室内土工试验,而室内试验中取样的偶然性、离散型和扰动性,以及试验过程中应力路径和实际的差异均会导致室内土工试验确定的模型参数与工程实际不同。所以,探究实验室测定模型参数与实际工程环境下参数之间的对应关系是解决好本构模型工程应用的关键。

致 谢: 感谢谢定义教授、俞茂宏教授和松冈元教授对笔者的教导;文中部分成果是与孙德安教授、罗汀教授共同研究取得的,感谢他们的支持与帮助;感谢北航岩土工程学科所有研究生的工作,特别感谢博士生孔令明和胡晶在本文整理和绘图方面的工作;感谢土力学与岩土工程界各位同仁的信任,使本人有机会成为黄文熙讲座主讲人。

参考文献:

- [1] 姚仰平, 侯 伟. 土的基本特性及其弹塑性描述[J]. 岩土力学, 2009, **30**(10): 2881 - 2902. (YAO Yang-ping, HOU Wei. Basic mechanical behavior of soils and their elastoplastic modeling[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(10): 2881 - 2902. (in Chinese))
- [2] 姚仰平, 侯 伟, 罗 汀. 土的统一硬化模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(10): 2135 - 2151. (YAO Yang-ping, HOU Wei, LUO Ting. Unified hardening model for soils[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, **28**(10): 2135 - 2151. (in Chinese))
- [3] 姚仰平, 张丙印, 朱俊高. 土的基本特性、本构关系及数值模拟研究综述[J]. 土木工程学报, 2012, **45**(3): 127 - 150. (YAO Yang-ping, ZHANG Bing-yin, ZHU Jun-gao. Behaviors, constitutive models and numerical simulation of soils[J]. China Civil Engineering Journal, 2012, **45**(3): 127 - 150. (in Chinese))
- [4] 黄文熙, 濮家骊, 陈愈炯. 土的硬化规律和屈服函数[J]. 岩土工程学报, 1981, **3**(3): 19 - 26. (HUANG Wen-xi, PU Jia-liu, CHEN Yu-jiong. Hardening rule and yield function for soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1981, **3**(3): 19 - 26. (in Chinese))
- [5] 沈珠江. 黏土的双硬化模型[J]. 岩土力学, 1995, **16**(1): 1 - 8. (SHEN Zhu-jiang. A double hardening model for clays[J]. Rock and Soil Mechanics, 1995, **16**(1): 1 - 8. (in Chinese))
- [6] 郑颖人, 孔 亮. 塑性力学中的分量理论——广义塑性力学[J]. 岩土工程学报, 2000, **22**(3): 269 - 274. (ZHENG Ying-ren, KONG Liang. Componental plastic mechanics——generalized plastic mechanics[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, **22**(3): 269 - 274. (in Chinese))
- [7] 殷宗泽. 土体本构模型剖析[J]. 岩土工程学报, 1996, **18**(4): 95 - 97. (YIN Zong-ze. Constitutive models for soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **18**(4): 95 - 97. (in Chinese))
- [8] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, **16**(2): 1 - 10. (YU Mao-hong. Unified strength theory for geomaterials and its applications[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, **16**(2): 1 - 10. (in Chinese))
- [9] 谢定义, 齐吉琳, 张振中. 考虑土结构性的本构关系[J]. 土木工程学报, 2000, **33**(4): 35 - 41. (XIE Ding-yi, QI Ji-lin, ZHANG Zhen-zhong. A constitutive laws considering soil structural properties[J]. China Civil Engineering Journal, 2000, **33**(4): 35 - 41. (in Chinese))
- [10] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N, THRUAIRAJAH A. Yielding of clays in state wetter than critical[J]. Géotechnique, 1963, **13**(3): 21 - 40.
- [11] DAFALIAS Y F. Bounding surface plasticity I: mathematical foundation and hypoplasticity[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1986, **112**(9): 966 - 987.
- [12] HASHIGUCHI K. Subloading surface model in unconventional plasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 1989, **25**(8): 917 - 945.
- [13] ASAOKA A, NAKANO M, NODA T. Super loading yield surface concept for highly structured soil behaviour[J]. Soils and Foundations, 2000, **40**(2): 99 - 110.
- [14] ZHANG F, YASHIMA A, NAKAI T, et al. An elasto-viscoplastic model for soft sedimentary rock based on tij concept and subloading yield surface[J]. Soils and Foundations, 2005, **45**(1): 65 - 73.
- [15] WU W. On high-order hypoplastic models for granular materials[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2006, **56**(1): 23 - 34.

- [16] YU H S. CASM: A unified state parameter model for clay and sand[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1998, **22**(8): 621 - 653.
- [17] SHENG D C, FREDLUND D G, GENS A. A new modelling approach for unsaturated soils using independent stress variables[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, **45**(4): 511 - 534.
- [18] 李广信. 土的清华弹塑性模型及其发展[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(1): 1 - 10. (LI Guang-xin. Characteristics and development of Tsinghua Elasto-plastic Model for soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(1): 1 - 10. (in Chinese))
- [19] 李相菘. 饱和土弹塑性理论的数理基础——纪念黄文熙教授[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(1): 1 - 33. (LI Xiang-song. Physical and mathematical bases of elastoplastic theories on saturated soils—In memory of Professor HUANG Wen-xi [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(1): 1 - 33 (in Chinese))
- [20] 殷建华. 从本构模型研究到试验和光纤监测技术研发[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(1): 1 - 15. (YIN Jian-hua. From constitutive modeling to development of laboratory testing and optical fiber sensor monitoring technologies[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(1): 1 - 15. (in Chinese))
- [21] 陈正汉. 非饱和土与特殊土力学的基本理论研究[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(2): 201 - 272. (CHEN Zheng-han. On basic theories of unsaturated soils and special soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(2): 201 - 272. (in Chinese))
- [22] 张建民. 砂土动力学若干基本理论探究[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(1): 1 - 50. (ZHANG Jian-min. New advances in basic theories of sand dynamics[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(1): 1 - 50. (in Chinese))
- [23] 刘汉龙, 丰土根, 高玉峰, 等. 砂土多机构边界面塑性模型及其试验验证[J]. 岩土力学, 2003, **24**(5): 696 - 700. (LIU Han-long, FENG Tu-gen, GAO Yu-feng, et al. Multiple mechanism boundary surface plasticity model of saturated sand and its test validation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, **24**(5): 696 - 700. (in Chinese))
- [24] 黄茂松, 扈萍, 张宏博. 考虑剪胀性和应变软化的粉细砂双屈服面本构模型[J]. 水利学报, 2008, **39**(2): 129 - 136. (HUANG Mao-song, HU Ping, ZHANG Hong-bo. Two-yield surface constitutive model for fine sand in consideration of dilatancy and strain softening[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2008, **39**(2): 129 - 136. (in Chinese))
- [25] 蒋明镜, 刘静德, 孙渝刚. 基于微观破损规律的结构性土本构模型[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(6): 1134 - 1139. (JIANG Ming-jing, LIU Jing-de, SUN Yu-gang. Constitutive model for structured soils based on microscopic damage law[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(6): 1134 - 1139. (in Chinese))
- [26] 赵成刚, 尤昌龙. 饱和砂土液化与稳态强度[J]. 土木工程学报, 2001, **34**(3): 90 - 96. (ZHAO Cheng-gang, YOU Chang-long. Liquefaction and steady state strength[J]. China Civil Engineering Journal, 2001, **34**(3): 90 - 96. (in Chinese))
- [27] 杨光华, 姚捷, 温勇. 考虑拟弹性塑性变形的土体弹塑性本构模型[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(8): 1496 - 1503. (YANG Guang-hua, YAO Jie, WEN Yong. Elastic-plastic model for soils considering quasi-elastic-plastic deformation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(8): 1496 - 1503. (in Chinese))
- [28] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N. Mechanical behaviour of an idealised 'wet clay'[C]//Proceedings of the 2nd European Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering. Wiesbaden, 1963: 47 - 54.
- [29] 姚仰平, 祝恩阳. 基于耦合应力建立土本构模型的方法[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(12): 1922 - 1929. (YAO Yang-ping, ZHU En-yang. Establishing soil constitutive model based on coupling stress[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(12): 1922 - 1929. (in Chinese))
- [30] ROSCOE K H, POOROOSHASB H B. A theoretial and experimental study of strains in triaxial compression tests on normally consolidated clays[J]. Géotechnique, 1963, **13**(1): 12 - 38.
- [31] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. Constitutive model for overconsolidated clays[J]. Science China - Technological Sciences, 2008, **51**(2): 179 - 191.
- [32] MITA K A, DASARI G R, LO K W. Performance of a three-dimensional Hvorslev-modified Cam clay model for overconsolidated clay[J]. International Journal of Geomechanics, 2004, **4**(4): 296 - 309.
- [33] YAO Y P, SUN D A, MATSUOKA H. A unified constitutive model for both clay and sand with hardening parameter independent on stress path[J]. Computers and Geotechnics, 2008, **35**(2): 210 - 222.
- [34] NAKAI T, HINOKIO M. A simple elastoplastic model for

- sand considering the stress path dependency in three-dimensional stresses[J]. *Soils and Foundations*, 2004, **44**(2): 53 - 70.
- [35] YAO Y P, SUN D A, LUO T. A critical state model for sands dependent on stress and density[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2004, **28**(4): 323 - 337.
- [36] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays[J]. *Géotechnique*, 2009, **59**(5): 451 - 469.
- [37] 姚仰平, 李自强, 侯伟, 等. 基于改进伏斯列夫线的超固结土本构模型[J]. *水利学报*, 2008, **39**(11): 1244 - 1250. (YAO Yang-ping, LI Zi-qiang, HOU Wei, et al. Constitutive model of over-consolidated clay based on improved Hvorslev envelope[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2008, **39**(11): 1244 - 1250. (in Chinese))
- [38] YAO Y P, GAO Z W, ZHAO J D, et al. Modified UH model: constitutive modeling of overconsolidated clays based on a parabolic Hvorslev envelope[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2012, **138**(7): 860 - 868.
- [39] WROTH C P, LOUDON P A. The correlation of strains within a family of triaxial tests on overconsolidated samples of kaolin[C]// *Proceedings of the Geotechnical Conference*. Oslo, 1967: 159 - 163.
- [40] 白冰, 赵成刚. 温度对黏性土介质力学特性的影响[J]. *岩土力学*, 2003, **24**(4): 533 - 537. (BAI Bing, ZHAO Cheng-gang. Temperature effects on mechanical characteristics of clay soils[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2003, **24**(4): 533 - 537. (in Chinese))
- [41] LALOUI L, CEKEREVAC C. Thermo-plasticity of clays[J]. *Computers and Geotechnics*, 2003, **30**(8): 649 - 660.
- [42] CAMPANELLA R G, MITCHELL J K. Influence of temperature variations on soil behaviour[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1968, **94**(3): 709 - 734.
- [43] ERIKSSON L G. Temperature effects on consolidation properties of sulphide clays[C]//*Proceedings of the 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Rotterdam Netheland, 1989: 2087 - 2090.
- [44] YAO Y P, YANG Y F, NIU L. UH model considering temperature effects[J]. *Science China - Technological Sciences*, 2011, **54**(1): 190 - 202.
- [45] YAO Y P, ZHOU A N. Non-isothermal unified hardening model: a thermo-elasto-plastic model for clays[J]. *Géotechnique*, 2013, **63**(15): 1328 - 1345.
- [46] HUECKEL T, FRANCOIS B, LALOUI L. Explaining thermal failure in saturated clays[J]. *Géotechnique*, 2009, **59**(3): 197 - 212.
- [47] BJERRUM L. Engineering geology of Norwegian normally-consolidated marine clays as related to settlements of buildings[J]. *Géotechnique*, 1967, **17**(2): 83 - 118.
- [48] YIN J H, GRAHAM J. Elastic viscoplastic modelling of the time-dependent stress-strain behaviour of soils[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1999, **36**(4): 736 - 745.
- [49] YAO Y P, KONG L M, HU J. An elastic-viscous-plastic model for overconsolidated clays[J]. *Science China - Technological Sciences*, 2013, **56**(2): 441 - 457.
- [50] YAO Y P, KONG L M, ZHOU A N, et al. Time-dependent unified hardening model: three-dimensional elastoviscoplastic constitutive model for clays[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2014, doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000885.
- [51] ZHU J G. Experimental study and elastic visco-plastic modelling of the time-dependent stress-strain behaviour of Hong Kong marine deposits[D]. Hong Kong: The Hong Kong Polytechnic University, 2000.
- [52] ALONSO E E, GENS A, JOSA A. A constitutive model for partially saturated soils[J]. *Géotechnique*, 1990, **40**(3): 405 - 430.
- [53] 姚仰平, 牛雷, 崔文杰, 等. 超固结非饱和土的本构关系[J]. *岩土工程学报*, 2011, **33**(6): 833 - 839. (YAO Yang-ping, NIU Lei, CUI Wen-jie, et al. UH model for unsaturated soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, **33**(6): 833 - 839. (in Chinese))
- [54] 姚仰平, 牛雷, 杨一帆, 等. 考虑温度影响的非饱和土本构模型[J]. *岩土力学*, 2011, **32**(10): 2881 - 2888. (YAO Yang-ping, NIU Lei, YANG Yi-fan, et al. Constitutive model for unsaturated clays considering temperature effects[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, **32**(10): 2881 - 2888. (in Chinese))
- [55] YAO Y P, NIU L, CUI W J. Unified hardening (UH) model for overconsolidated unsaturated soils[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2014, **51**(7): 810 - 821.
- [56] 姚仰平, 牛雷, 韩黎明, 等. 超固结非饱和土的试验研究[J]. *岩土力学*, 2011, **32**(6): 1601 - 1606. (YAO Yang-ping,

- NIU Lei, HAN Li-ming, et al. Experimental study of behaviors of overconsolidated unsaturated clays[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, **32**(6): 1601 - 1606. (in Chinese))
- [57] ESTABRAGH A R, JAVADI A A. Critical state for overconsolidated unsaturated silty soil[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2008, **45**(3): 408 - 420.
- [58] MATSUOKA H, JUNICHI H, KIYOSHI H. Deformation and failure of anisotropic and deposits[J]. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1984, **32**(11): 31 - 36. (in Japanese)
- [59] 罗汀, 李萌, 孔玉侠, 等. 基于 SMP 的岩土各向异性强度准则[J]. *岩土力学*, 2009, **30**(增刊 2): 127 - 131. (LUO Ting, LI Meng, KONG Yu-xia, et al. Failure criterion based on SMP for anisotropic geomaterials[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, **30**(S2): 127 - 131. (in Chinese))
- [60] YAO Y P, KONG Y X. Extended UH model: three-dimensional unified hardening model for anisotropic clays[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2011, **138**(7): 853 - 866.
- [61] 姚仰平, 孔玉侠. 横观各向同性土强度与破坏准则的研究[J]. *水利学报*, 2012, **43**(1): 43 - 50. (YAO Yang-ping, KONG Yu-xia. Study on strength and failure criterion of cross-anisotropic soil[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2012, **43**(1): 43 - 50. (in Chinese))
- [62] MATSUOKA H, NAKAI T. Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principle stresses[J]. *Proceedings of JSCE*, 1974, **232**: 59 - 70.
- [63] KIRKGAARD M M, LADE P V. Anisotropic three-dimensional behavior of a normally consolidated clay[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1992, **30**(5): 848 - 858.
- [64] 王立忠, 沈恺伦. K_0 固结结构性软黏土的本构模型[J]. *岩土工程学报*, 2007, **29**(4): 496 - 504. (WANG Li-zhong, SHEN Kai-lun. A constitutive model of K_0 consolidated structured soft clays[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, **29**(4): 496 - 504. (in Chinese))
- [65] 尹振宇. 天然软黏土的弹黏塑性本构模型: 进展及发展[J]. *岩土工程学报*, 2011, **33**(9): 1357 - 1369. (YIN Zhen-yu. Elastic viscoplastic models for natural soft clay: review and development[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, **33**(9): 1357 - 1369. (in Chinese))
- [66] ZHU E Y, YAO Y P. A structured UH model[C]// *Constitutive Modeling of Geomaterials*. Beijing, 2013: 675 - 689.
- [67] 施建勇, 赵维炳, LEE Fouk-hou, 等. 软黏土的各向异性和小应变条件下的本构模型(ASM) [J]. *岩土力学*, 2000, **21**(3): 209 - 212. (SHI Jian-yong, ZHAO Wei-bing, LEE Fouk-hou, et al. A constitutive model for anisotropic and small-strain behaviour of soft clay(ASM)[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2000, **21**(3): 209 - 212. (in Chinese))
- [68] 姚仰平, 万征, 秦振华. 动力 UH 模型及其有限元应用[J]. *力学学报*, 2012, **44**(1): 132 - 139. (YAO Yang-ping, WAN Zheng, QIN Zhen-hua. Dynamic UH model for sands and its application in FEM[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, **44**(1): 132 - 139. (in Chinese))
- [69] TATSUOKA F, TOKI S, MIURA S, et al. Some factors affecting cyclic undrained triaxial strength of sand[J]. *Soils and Foundations*, 1986, **36**(3): 99 - 116.
- [70] CHU J, LO S. Asymptotic behaviour of a granular soil in strain path testing[J]. *Géotechnique*, 1994, **44**(1): 65 - 82.
- [71] 罗汀, 侯伟, 姚仰平. 考虑渐近状态特性的超固结土本构模型[J]. *岩土力学*, 2010, **31**(3): 683 - 688. (LUO Ting, HOU Wei, YAO Yang-ping. An asymptotic state constitutive model for overconsolidated clays[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, **31**(3): 683 - 688. (in Chinese))
- [72] LUO T, YAO Y P, CHU J. Asymptotic state behaviour and its modeling for saturated sand[J]. *Science China - Technological Sciences*, 2009, **52**(8): 2350 - 2358.
- [73] 罗汀, 田新国, 姚仰平, 等. 土的三维渐近状态准则[J]. *岩土工程学报*, 2011, **33**(5): 792 - 796. (LUO Ting, TIAN Xin-guo, YAO Yang-ping, et al. Three-dimensional asymptotic state criterion for soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, **33**(5): 792 - 796. (in Chinese))
- [74] LUO T, YAO Y P, ZHOU A N, et al. A three-dimensional criterion for asymptotic states[J]. *Computers and Geotechnics*, 2012, **41**: 90 - 94.
- [75] YAO Y P, LU D C, ZHOU A N, et al. Generalized non-linear strength theory and transformed stress space[J]. *Science China - Technological Sciences*, 2004, **47**(6): 691 - 709.
- [76] MATSUOKA H, YAO Y P, SUN D A. The Cam-clay models revised by the SMP criterion[J]. *Soils and Foundations*, 1999, **39**(1): 81 - 95.
- [77] YAO Y P, SUN D A. Application of Lade's criterion to Cam-clay model[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2000,

- 126(1): 112 - 119.
- [78] SUN D A, YAO Y P, MATSUOKA H. Modification of critical state models by Mohr-Coulomb criterion[J]. Mechanics Research Communications, 2006, **33**(2): 217 - 232.
- [79] YAO Y P, ZHOU A N, LU D C. Extended transformed stress space for geomaterials and its application[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, **133**(10): 1115 - 1123.
- [80] 王乃东, 姚仰平. 基于变换应力方法的各向异性模型三维化[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(1): 50 - 56. (WANG Nai-dong, YAO Yang-ping. Generalization of anisotropic constitutive models using transformed stress method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(1): 50 - 56. (in Chinese))
- [81] YAO Y P, WANG N D. Transformed stress method for generalizing soil constitutive models[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2014, **140**(3): 614 - 629.
- [82] COLLINS I F. Elastic/plastic models for soils and sands[J]. International Journal of Mechanical Science, 2005, **47**(4): 493 - 508.
- [83] YAO Y P, CUI W J, WANG N D. Three-dimensional dissipative stress space considering yield behavior in deviatoric plane[J]. Science China - Technological Sciences, 2013, **56**(8): 1999 - 2009.
- [84] SUN D A, MATSUOKA H, YAO Y P, et al. An anisotropic hardening elastoplastic model for clays and sands and its application to FE analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2004, **31**(1): 37 - 46.
- [85] 姚仰平, 冯 兴, 黄 祥, 等. UH 模型在有限元分析中的应用[J]. 岩土力学, 2010, **31**(1): 237 - 245. (YAO Yang-ping, FENG Xing, HUANG Xiang, et al. Application of UH model to finite element analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, **31**(1): 237 - 245. (in Chinese))
- [86] 罗 汀, 秦振华, 姚仰平, 等. UH 模型切线刚度矩阵对称化及其应用[J]. 力学学报, 2011, **43**(6): 1186 - 1189. (LUO Ting, QIN Zhen-hua, YAO Yang-ping, et al. Symmetrization and applications of tangent stiffness matrix for UH model[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, **43**(3): 1186 - 1189. (in Chinese))
- [87] 冯 兴, 姚仰平, 李春亮, 等. UH 模型在双层地基受力变形分析中的应用[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(5): 805 - 811. (FENG Xing, YAO Yang-ping, LI Chun-liang, et al. Application of UH model to analysis of deformation of double-layer subgrade[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(5): 805 - 811. (in Chinese))
- [88] LUO T, QIN Z H, FENG X, et al. A symmetrisation method for non-associated unified hardening model[J]. Computers and Geotechnics, 2013, **52**(6): 38 - 45.
- [89] 熊文林. 非关联塑性切线刚度矩阵的对称表示[J]. 应用数学和力学, 1986, **7**(11): 983 - 991. (XIONG Wen-lin. Symmetric formulation of Tangential stiffness for non-associated plasticity[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1986, **7**(11): 983 - 991. (in Chinese))
- [90] YAO Y P, YAMAMOTO H, WANG N D. Constitutive model considering sand crushing[J]. Soils and Foundations, 2008, **48**(4): 603 - 608.